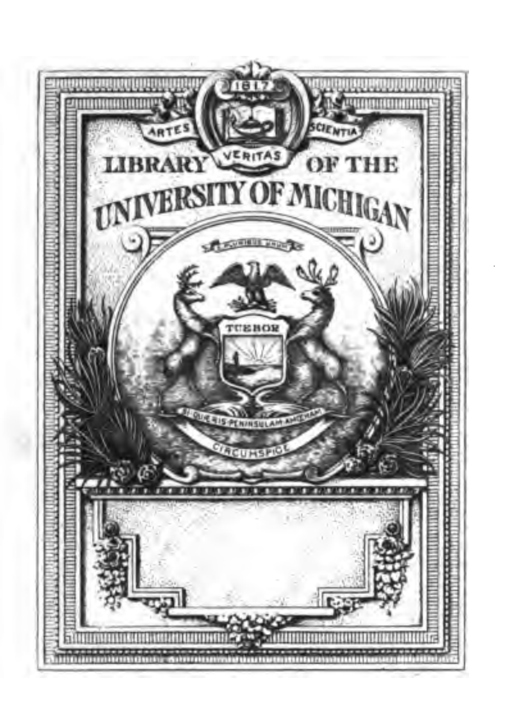

1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

J. Liebleins

Sammlung von Aufgaben

aus der

algebraischen Analysis

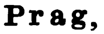
zum Selbstunterricht.

Zweite verbesserte und vermehrte Auflage

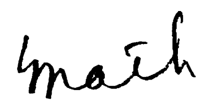
herausgegeben

von

Dr. W. Láska.



Prag,
Verlag der k. k. Hofbuchhandlung von G. Neugebauer.
1889.



Vorrede zur ersten Auflage.

Die Herausgabe einer „Sammlung von Aufgaben aus der algebraischen Analysis“ findet wohl ihre genügende Rechtfertigung in dem regen Interesse, welches diesem Theile der mathematischen Wissenschaft bisher zugewendet wurde, und in neuerer Zeit zur Aufnahme desselben als selbständigen Lehrstoff an höheren Lehranstalten geführt hat.

Auch an dem polytechnischen Institute zu Prag findet diese Disciplin ihre Vertretung in speciellen mir überwiesenen Vorträgen, und dieser Umstand ist es auch, welcher mir schon oft den bisherigen Mangel eines derartigen Hilfsbuches fühlbar machte, und mich deshalb bestimmte, die eben so mühsame als wenig dankbare Bearbeitung der obengenannten Aufgabensammlung vorzunehmen.

Dem Unterrichtsbedürfnisse entsprungen, soll das Buch zunächst diesem dienen; doch wird auch einem tiefer gehenden Studium der algebraischen Analysis in zahlreichen Theoremen und schwierigeren Problemen hinlänglich Stoff und Anregung geboten. Bei der Anlage des Buches war für mich das anerkannt treffliche „Handbuch der algebraischen Analysis von Dr. Oskar Schlömilch“ bestimmend. Dem entsprechend enthält die „Sammlung“ zu jedem Capitel dieses Lehrbuches — mit Ausnahme eines einzigen — eine Reihe geordneter Beispiele und Aufgaben, mit nur kurzen Andeutungen zur Lösung der schwierigeren, dagegen die nöthigen Erläuterungen zu jenen

Aufgaben und Theoremen, welche gleichsam Ergänzungen des im Schlömilch'schen Werke behandelten Stoffes bilden. Was die von mir benützten Quellen anbelangt, so habe ich vor Allem der zahlreichen einschlägigen Aufsätze in Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik, Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik, Grunert's Archiv für Mathematik und Physik, *Nouvelles annales de mathématiques* und Liouville's *Journal de mathématiques* und des klassischen Euler'schen Werkes *Introductio in analysin infinitorum* zu gedenken. Die Arbeiten von Gelehrten, wie Arndt, Bessel, Bertrand, Betti, Bounet, Catalan, Cauchy, Clausen, Dienger, Eisenstein, Euler, Gauss, Hankel, Heine, Jacobi, Lagrange, Möbius, Prouhet, William Roberts (Strebor), Schellbach, Schlömilch, Stern, Waring, Werner und Whitworth finden in der „Sammlung von Aufgaben aus der algebraischen Analysis" ihre Vertretung.

Diese Berücksichtigung zahlreicher Originalarbeiten ist es auch, welche mich zu der Hoffnung ermuthigt, dem Buche werde die Theilnahme des mathematischen Publikums nicht fehlen.

Prag, im April 1867.

Johann Lieblein.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Indem ich auf Wunsch der Verlagsbuchhandlung die Bearbeitung dieser neuen Auflage übernahm, war es mein Bestreben, einerseits durch Aufnahme neuer Beispiele, andererseits durch Hinzufügung der Quellen, soweit mir dieselben bekannt geworden sind, die Brauchbarkeit dieses Uebungsbuches noch mehr zu erhöhen. Der Raumersparniss halber wurden Beispiele, die Wiederholungen enthielten, weggelassen. Für denjenigen, der eine grössere Fülle derselben wünscht, wird sich die erste Auflage noch als brauchbar erweisen. Eine willkommene Ergänzung dieses Werkes dürfte meine Formelnsammlung (Braunschweig, Vieweg & Sohn) sein.

Prag, October 1888.

Dr. W. **Láska.**

Inhalt.

Corrigenda.

Seite 3,	Aufg. 17,	Zeile 3	statt	$v_2 y z_3$	lies $v^2 y z^3$
„ 5	„ 38	„ 2	„	36)	„ 37)
			„	u_m	„ u^m
			„	37)	„ 38)
„ 17	„ 50	„ 6	„	$F(a+n) F(a)$	lies $F(a+n) + F(a)$
„ 31	„ 81	„ 5	„	$<=1$	lies $<+1$
„ 94	„ 64	„ 11	„	29	lies 27.

I. Ueber die verschiedenen Arten von Functionen.

1) Wie viele Glieder besitzt eine ganze rationale Function von n Variablen und der r^{ten} Ordnung?

a) wenn sie vollständig ist,

b) wenn alle durch x^p theilbare Glieder fehlen,

c) wenn alle durch x^p und y^q theilbare Glieder fehlen.

2) Für welchen Werth von a übergeht die gebrochene Function
$$\frac{x^3 + y^3 + z^3 - axyz}{x + y + z}$$ in eine ganze?

3) Unter welcher Bedingung wird die Function
$$\frac{x^p + 2x^{p-q}y^q + y^q}{(x+y)^2}$$ zu einer ganzen?

4) Man beweise, dass
$$\frac{(x+y+z)^{2n+1} - x^{2n+1} - y^{2n+1} - z^{2n+1}}{(x+y)(x+z)(y+z)}$$
eine ganze Function ist.

Anleitung. Man schreibe
$$[x + (y + z)]^{2n+1} - x^{2n+1} - (y^{2n+1} + z^{2n+1}) \text{ etc.}$$

5) Wann ist $\frac{(x+y)^n - x^n - y^n}{n\,(xy)\,(x+y)}$ eine ganze Function?

Vergl. Stern, Allg. Analys. p. 355. Messenger of math. II Ser. XIV. p. 8—11.

6) Wann ist $\frac{(x+1)^m + x^m - 1}{x^2 + x + 1}$ eine ganze Function?

Anl. Die Wurzeln der Gleichung $x^2 + x + 1$ müssen zugleich die Wurzeln von $(x+1)^m + x^m - 1$ sein.

7) Sei

$$a)\ \varphi(p, q) = \frac{x^{(q-1)p} + x^{(q-2)p} + \dots + x^p + 1}{x^{q-1} + x^{q-2} + \dots + x + 1}, \text{ so wird}$$

$\varphi(p, q)$ eine ganze Function von x sein.

Catalan. Mem. Liège 1887.

Anleitung. Es ist $\varphi(p, q) = \frac{1 - x^{pq}}{1 - x^p} \cdot \frac{1 - x}{1 - x^q}$

Setze $(1 - x^{pq})(1 - x) = (1 - x f)(1 - x^q)$, so lässt sich leicht zeigen, dass $(1 - x^{pq})(1 - x)$ durch $(1 - x^q)$ theilbar ist.

b) Es ist der Ausdruck

$$\frac{x^{mb} - 1}{x^b - 1} \cdot \frac{x^{(m-1)b} - 1}{x^{2b} - 1} \cdots \frac{x^{(m+1-p)b} - 1}{x^{pb} - 1}$$

eine ganze Function, wenn b, m, p positiv und ganz, so wie $m \geqq p$ ist.

Vergl. Nouv. Ann. II Ser. XIV p. 349—350.

Folgende Ausdrücke sind als ganze homogene und symmetrische Functionen der in ihnen vorkommenden Grössen darzustellen:

8) $\frac{x^2}{x - y} + \frac{y^2}{y - x}$

9) $\frac{x^3}{(x - y)(x - z)} + \frac{y^3}{(y - x)(y - z)} + \frac{z^3}{(z - x)(z - y)}$

10) $\frac{(xy)^2}{(x - z)(y - z)} + \frac{(xz)^2}{(x - y)(z - y)} + \frac{(yz)^2}{(y - x)(z - x)}$

Man findet $x + y$, $x + y + z$, $xy + yz + xz$.

Vergl. Grunerts Archiv B. 22.

11) Sei $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Beweise, dass die Ausdrücke

$ab - 9c$, $\quad a^3c - b^3$

$b^2 - 3ac$, $\quad 2a^3 - 9ab + 27c$

symmetrische Functionen der Wurzeln sind.

Vergl. Matthiessen: Grundzüge der ant. und mod. Algebra p. 242.

Man beweise, dass folgende Ausdrücke symmetrische Functionen der Grössen $x_1 x_2 \cdots x_n$ sind.

12) $2x_1x_2 + 2x_2(x_1 + x_2) + 2x_3(x_1 + x_2 + x_3) + \cdots$
$+ 2x_n(x_1 + x_2 + \cdots x_n)$.

13) $x_1x_2(x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)x_3(x_1 + x_2 + x_3) + \cdots$
$+ (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})x_n(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$.

Vergl. Nouvell. Ann. 2. Ser. I. Bnd.

14) $$\cos\frac{1}{2}(x_2 + x_3 - x_1) + \frac{2\sin\frac{x_2}{2}\sin\frac{x_3}{2}\sin\frac{x_2+x_3}{2}}{\sin\frac{x_1 + x_2 - x_3}{2}}.$$

Vergl. Grunerts Archiv Bd. 29.

15) $$\frac{x_1}{a(a+x_1)} + \frac{x_2}{(a+x_1)(a+x_1+x_2)} + \frac{x_3}{(a+x_1+x_2)(a+x_1+x_2+x_3)} + \cdots$$
$$+ \frac{x_n}{(a+x_1+\cdots+x_{n-1})(a+x_1+\cdots+x_n)}$$

Antwort. $= \frac{1}{a} - \frac{1}{a + x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$

Anleitung:
$$\frac{x_1}{a(a+x_1)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+x_1} \text{ etc.}$$

16) $$\frac{\sin x_1}{\cos a \cos(a+x_1)} + \frac{\sin x_2}{\cos(a+x_1)\cos(a+x_1+x_2)} + \cdots$$
$$+ \frac{\sin x_n}{\cos(a+x_1+\cdots+x_{n-1})\cos(a+x_1+\cdots+x_n)}$$

17) Aus wie vielen und welchen Gliedern besteht die symmetrische Function $f(v, w, x, y, z)$, wenn in derselben

a) das Glied $v_2 y z_3$

b) das Glied $v^3 x^2 y^2 z$

vorkommt.

18) Es ist die Anzahl der Glieder zu finden, aus welcher die m förmige symmetrische Function
$$\Sigma^1 (x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \cdots x_m^\mu) = [\alpha, \beta, \gamma, \cdots \mu]$$
der n Variablen besteht.

19) Man bestimme die Anzahl der Glieder, welche die symmetrische Function
$$[\alpha^{\alpha'} \beta^{\beta'} \gamma^{\gamma'} \cdots \mu^{\mu'}]$$
enthält, wenn
$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \cdots + \mu' = m \text{ ist.}$$

Zu 17—19. Vergl. Meier-Hirsch, Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der Gleichungen. Berlin 1809.

Folgende heterogene Functionen sind durch Einführung neuer Variablen in homogene zu verwandeln:

20) $y^5 + x^2y + xy^3 + \frac{x^3}{y}$

21) $\frac{a}{x} + y + xy^2 + x^2y^3 + x^4y^5$

22) $\frac{ay}{x^2} + bxy^4 + c\sqrt{\frac{y^5}{x}}$

23) $\frac{ay^2}{x^2} + by^3x + \frac{cy^5}{\sqrt{x}}$

24) $\frac{ay}{xz} + bxyz + \frac{cz}{xy}$

25) $ay\sqrt{x} + by\sqrt{z^3} + c\sqrt{xz^3}$

Vergl. Euler, Einleitung in die Analysis des Unendlichen. D. v. H. Maser 1. Th. 1885 p. 71. § 93.

26) Wie viele Glieder enthält eine vollständige ganze rationale und homogene Function von n Variablen und m Dimensionen?

27) Wie viele m gliedrige ganze rationale und homogene Functionen von r Dimensionen lassen sich aus n Variablen bilden, wenn

a) in jedem Gliede gleich viele Variable vorkommen sollen?

b) wenn diese besondere Bedingung nicht gestellt wird?

28) Wie viele Glieder enthält die ganze rationale und homogene Function von m Dimensionen und n Variablen, wenn die Function ihren Werth nicht ändert, indem man sämmtliche Variable, eine einzige ausgenommen, mit entgegengesetzten Zeichen nimmt?

In folgende irrationale Functionen ist eine neue Veränderliche z derart einzuführen, dass sowohl x als y rational durch z ausgedrückt werden:

29) $y = \sqrt[m]{(a + bx)^n}$

30) $y = \sqrt[m]{\left(\frac{a + bx}{c + dx}\right)^n}$

31) $y = \sqrt{a + bx^2}$

32) $y = \sqrt{ax + bx^2}$

33) $y = \sqrt{(a + bx)(c + dx)}$

34) $y = \sqrt{a^2 + (b + cx)(d + ex)}$

35) $y = \sqrt{(a + bx)(c + dx) + e^2x^2}$

36) $y = \sqrt{(a + bx)(c + dx) + (e + fx)^2}$

37) $$y = \frac{A_1 x^{\frac{a_1}{p_1}} + A_2 x^{\frac{a_2}{p_2}} + A_3 x^{\frac{a_3}{p_3}} + \ldots\ldots + A_n x^{\frac{a_n}{p_n}}}{B_1 x^{\frac{a_1}{q_1}} + B_2 x^{\frac{a_2}{q_2}} + B_3 x^{\frac{a_3}{q_3}} + \ldots\ldots + B_n x^{\frac{a_n}{q_n}}}$$

38) $$y = A\left(\frac{a + bx}{c + dx}\right)^{\frac{m}{n}} + B\left(\frac{a + bx}{c + dx}\right)^{\frac{p}{q}} + C\left(\frac{a + bx}{c + dx}\right)^{\frac{r}{s}}$$

Anl. zur Aufg. 37) und 38). Sei m die kleinste durch alle a_n theilbare Zahl, so wird ad 36) $x = u_m$ zu setzen sein, ähnlich 37). Vergleiche Euler § 46 und folg*).

39) Man führe in die Gleichung

$$x^3 + y^3 - cxy = 0$$

eine neue Variable z so ein, dass sowohl x als y rational durch z ausgedrückt werden.

40) Die durch die Gleichung

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + cx = 0$$

verbundenen Variablen x und y sind als rationale Functionen einer neuen Veränderlichen darzustellen.

41) Man drücke x und y rational durch eine neue Variable aus, wenn zwischen x und y die Gleichung

$$ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 = 0$$

besteht.

42) Wenn zwischen x und y die Gleichung

$$ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 - ey - fx = 0$$

besteht, so stelle man x und y als explicite Functionen einer neuen Veränderlichen dar.

*) Vergl. Dr. Láska's Formelnsammlung der reinen und angew. Mathematik § 36. Braunschweig, Vieweg & Sohn.

Aus folgenden Gleichungen sind x und y durch zweckmässige Substitution als entwickelte Functionen einer neuen Veränderlichen z darzustellen:

43) $ay^3 + by^2x + cyx^2 + dx^3 = 2ey^2 + 2fyx + 2gx^2 + hy + ix$

44) $y^5 - 2ax^3 - by - cx = 0$

45) $y^{10} - 2ayx^6 - byx^3 - cy^4 = 0$

46) $ay^6 - bx^2y^2 + cx^2 = 0$

47) $y^4 - 2xy + 7 = 0$

48) $x^3 + 5y^4x^2 - 3y^3x = 0$

49) $x^4y^6 + ax^4y + b = 0$

Vergl. zu 39—49. Euler, Analysis des Unendlichen. 1. Th. § 52.

Leite folgende Ungleichheiten ab:

50) $a^2 + b^2 > 2ab$

51) a) $na^n + b^n > a^n + na^{n-1}b$

b) $\frac{m}{r}\sqrt[r]{a^{m+n}} + \frac{n}{r}\sqrt[r]{b^{m+n}} > \frac{(m+n)}{r}\sqrt[r]{a^m b^n}$

52) a) $\frac{1}{n}\sum_1^n a_k < \sqrt{\frac{1}{n}\sum_1^n a^2_k}$

b) $\frac{1}{n}\sum_1^n a_k b_k < \sqrt{\frac{1}{n}\sum_1^n a^2_k} \cdot \sqrt{\frac{1}{n}\sum_1^n b^2_k}$

53) $\prod_1^n a_k < \left\{\frac{1}{n}\sum_1^n a_k\right\}^n$

Vergl. Salomon, Grundriss der höheren Analysis. Wien 1844. § 6.

54) $e^x > 1 + x$

55) $x > \log(1 + x)$

56) $x > \sin x > \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

Seien x und k positive ganze Zahlen, so wird:

57) $k\left[\sqrt[k]{x} - 1\right] > \log x > k\left[1 - \frac{1}{\sqrt[k]{x}}\right]$

Vergl. Lagrange, Leçons sur le calcul des fonctions p. 31.

58) $m(a - b)a^{m-1} > a^m - b^m > m(a - b)b^{m-1}$

wenn $a > b > 0$

59) $\frac{a^{2n+2}-1}{a(a^{2n}-1)} > \frac{n+1}{n}$

n positiv und ganz.

Messenger of math. 2. Ser. VIII, p. 133.

60) $x < \log \frac{1}{1-x} < x + \frac{x^2}{2(1-x)}, \ o < x < 1$

61) $\frac{x}{1-x} < \log(1+x) < x \frac{1+\frac{1}{2}x}{1+x}$

62) $x > \log(1+x) > x\frac{1}{2} - x^2, \ o < x \leqq 1$

Hat man eine beliebige Reihe positiver oder negativer Grössen

$$a_1, a_2, a_3, \cdots a_4$$

deren grösste etwa x und kleinste β sein mag, und ist

$$\beta \lesseqgtr A \lesseqgtr \alpha$$

so wird A das Mittel dieser Grössen genannt und mit

$$M(a_1, a_2, \cdots a_n)$$

bezeichnet.

Man beweise nun, dass

63) $\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots}{b_1+b_2+b_3+\cdots} = M\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \cdots\right)$

64) $\frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots}{p_1 + p_2 + \cdots} = M(a_1, a_2, \cdots\cdots)$

65) $\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots\cdots a_n} = M(a_1, a_2, \cdots a_n)$

66) $(a_1 a_2 a_3 \cdots\cdot)^{\frac{1}{b_1+b_2+b_3+\cdots}} = M(\sqrt[b_1]{a_1}, \sqrt[b_2]{a_2}, \cdots\cdot)$.

Vergl. Klügel, Mathem. Wörterbuch. Supplement. I, p. 925. Schlömilch's Handbuch IV. Cap., Cauchy Algeb. Analys. Note 2.

II. Ueber cyclometrische Functionen.

Man beweise folgende Formeln:

1) $\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{4}{5} = \frac{\pi}{2}$.

Anl.: Setze

$$\arcsin\frac{3}{5} = a, \quad \text{also } \sin a = \frac{3}{5}$$

$$\arcsin\frac{4}{5} = b, \quad \text{also } \sin b = \frac{4}{5}$$

so wird

$$a + b = \frac{\pi}{2}$$

oder

$$\sin(a + b) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

da nun

$$\sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = 1$$

so ist die obige Gleichung erwiesen.

2) $\arcsin\frac{8}{17} + \arcsin\frac{15}{17} = \frac{\pi}{2}$

3) $2 \arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$

4) $6 \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{4} - \arcsin\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} + \arccos\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\pi}{2}$

5) $\text{arctang}\,(2 - \sqrt{3}) + \text{arctang}\,(2 + \sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$

6) $2\,\text{arctang}\,(\sqrt{2}-1) + 2\,\text{arctang}\,(2-\sqrt{3}) + \text{arccot}(2+\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$

7) $\arcsin\frac{1}{2} + \text{arctang}\,(2 - \sqrt{3}) = \frac{\pi}{4}$

8) $\text{arctang}\,\frac{1}{2} + \text{arctang}\,\frac{1}{5} + \text{arctang}\,\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

9) $8\,\text{arctang}\,\frac{1}{3} + 4\,\text{arctang}\,\frac{1}{7} = \pi$

10) $4\,\text{arctang}\,\frac{1}{5} - \text{arctang}\,\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$

11) $\text{arcsec}\,\frac{4}{\sqrt{5}-1} - \text{arcsec}\,\frac{4}{\sqrt{5}+1} = \text{arccosec}\,\frac{4}{\sqrt{5}+1}$

12) $\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin x$

13) $\arcsin\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2-2x}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\arcsin x$

Anl. Man gehe von

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{z}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 - 2\sin z}$$

aus und setze

$$z = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$$

14) $\arccos \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\cdots-\sqrt{2}}}} = \frac{\pi}{3} + (-1)^n \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\pi}{6}$

(Durch wiederholte Anwendung von 13).

15) $\text{arctang } d_1 + \text{arctang } d_2 + \cdots \text{arctang } d_n =$

$\text{arctang} \frac{\Sigma d_1 - \Sigma d_1 d_2 d_3 + \Sigma d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 - \ldots}{1 - \Sigma d_1 d_2 + \Sigma d_1 d_2 d_3 d_4 + \ldots}$

Durch den Schluss von n auf n + 1 zu beweisen.

16) $\arcsin(x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz) = \frac{\pi}{2}$, wenn zugleich

$$\arcsin x + \arcsin y + \arcsin z = \frac{\pi}{2}$$

17) $\text{arccot}(x + y + z - xyz) = \frac{\pi}{2}$, wenn zugleich

$$\text{arccot } x + \text{arccot } y + \text{arccot } z = \frac{\pi}{2} \text{ *)}$$

Beweise dass:

18) $\text{arctang} \frac{r \sin x}{1 - r\cos x} - \text{arctang} \frac{-r \sin x}{1 + r\cos x} = \text{arctang} \frac{2r}{1+r^2} \sin x$

19) $\frac{1}{2} \text{arctang } x - \frac{1}{2} \text{arctang} \frac{x}{2+x^2} = \frac{1}{2} \text{arctang} \frac{x}{2}$

20) $\frac{1}{3} \text{arctang } x - \frac{1}{3} \text{arctang} \frac{x}{2+x^2} - \frac{1}{3} \text{arctang} \frac{x}{2.3+x^2} =$

$\frac{1}{3} \text{arctang} \frac{x}{3}$

21) $\frac{1}{4} \text{arctang } x - \frac{1}{4} \text{arctang} \frac{x}{2+x^2} - \frac{1}{4} \text{arctang} \frac{x}{2.3+x^2} -$

$\frac{1}{4} \text{arctang} \frac{x}{3.4+x^2} = \frac{1}{4} \text{arctang} \frac{x}{4}$

22) $\text{arctang} \frac{ax-y}{ay+x} + \text{arctang} \frac{1}{a} = \text{arctang} \frac{x}{y}$

23) $\text{arctang} \frac{ax-y}{ay+x} + \text{arctang} \frac{b-a}{ab+1} + \text{arctang} \frac{1}{b} = \text{arctang} \frac{x}{y}$

Man drücke die Function

24) $\text{arctang} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

durch arcsin x aus.

Anl. Setze arcsin x = z, also x = sin z, so wird

$$\text{arctang} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = f(z)$$

*) Vergl. Dr. Láska, Formelsammlung der reinen und angew. Mathem. Braunschweig, Vieweg & Sohn.

oder

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \operatorname{tang} f(z)$$

Nun ist aber

$$\sqrt{\frac{1+\sin z}{1-\sin z}} = \operatorname{tang}\left(45^0 + \frac{z}{2}\right)$$

also wird

$$f(z) = \frac{\pi}{4} + \frac{z}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin x$$

Behandle ebenso:

25) $\arccos \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{2}$

26) $\arcsin \frac{1}{2}(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})$

Man drücke nachstehende Functionen durch arctang x aus:

27) $\operatorname{arctang}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = ?$

28) $\operatorname{arctang}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = ?$

29) $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = ?$

30) Gegeben arcsec x; zu berechnen $\operatorname{arcsec} \frac{x^2}{x^2-2}$

31) Gegeben arcsin x und arcsin y, zu finden:

$$\operatorname{arctang} \frac{x+y}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}}$$

32) Es ist $\operatorname{arctang} \frac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2}}{x-y}$ durch arccos x und arccos y auszudrücken.

Man bestimme aus folgenden Gleichungen die Unbekannte x:

33) $\operatorname{arctang} \frac{1}{x-1} - \operatorname{arctang} \frac{1}{x+1} = \frac{\pi}{12}$, $x = \pm(1 + \sqrt{3})$

34) $\operatorname{arctang}(x+4) + \operatorname{arctang}(x-4) = \frac{\pi}{6}$, $x = -\sqrt{3} \pm \sqrt{26}$

35) $\operatorname{arctang}(x+1) = 3 \operatorname{arctang}(x-1)$, $x = \pm\sqrt{2}$

36) $x = \arcsin \frac{\sqrt{3} - \cos x}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}$

37) $a = \arcsin 2\sqrt{x^2 - x^4}$, $x = \pm \cos \frac{a}{2}, \pm \sin \frac{a}{2}$

38) $\operatorname{arccot} 16(\cot x - \sec x) = x$, $x = \pm \operatorname{artang} \frac{3}{4} + k\pi$

39) $\operatorname{arcsec} a - \operatorname{arcsec} b = \operatorname{arcsec} \frac{x}{b} - \operatorname{arcsec} \frac{x}{a}, \quad x = \pm ab$

Man berechne aus folgenden Gleichungen die Werthe der beiden Unbekannten x und y:

40) $\arcsin \frac{\sqrt{2ax - a^2}}{x} = \operatorname{arcsec} \frac{y}{b}$

$\arccos\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2 \arccos \sqrt{\frac{y}{b}}$

41) $\arcsin\left(\frac{y-1}{y+1}\right) = 2 \operatorname{arctang}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$\operatorname{arccot} x^2 y^2 = 2 \operatorname{arctang} (\sqrt{2} - 1)$

42) $\frac{1}{2} \arcsin 2x\sqrt{1 - x^2} = \operatorname{arctang} \frac{y-3}{\sqrt{-8 + 6y - y^2}} + \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{arccot} \frac{1}{x^2} = \arcsin \frac{5 - y^2}{\sqrt{26 - 10y^2 + y^4}}$

43) $\operatorname{arctang} \frac{ax - y}{ay + x} + \operatorname{arctang} \frac{1}{a} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\arccos x + \arcsin \sqrt{1 - y^2} = \frac{\pi}{2}$

44) $\operatorname{arctang}\left(\frac{x\sqrt{a^2 - y^2} - y}{y\sqrt{a^2 - y^2} + x}\right) - \operatorname{arctang}\left(\frac{y\sqrt{x^2 + y^2} - x}{x\sqrt{x^2 + y^2} + y}\right) =$

$= \operatorname{arctang} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \operatorname{arctang} \frac{1}{\sqrt{a^2 - y^2}}$

$\operatorname{arctang} \frac{x + y}{\sqrt{4x^2 - (x+y)^2}} = \arcsin \frac{x}{2}$

45) $2 \operatorname{arctang} \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \arccos[1 - 2a^4 + 4a^2y^2 - 2y^4]$

$\operatorname{arctang} \frac{2(x^2 - y^2)}{1 - (x^2 - y^2)^2} = 2 \operatorname{arcsec} \sqrt{1 + b^4}$

46) $\arcsin \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arccot} \frac{1 - 2a^2}{2a\sqrt{1 - a^2}}$

$\operatorname{arctang}\left(\frac{x - y}{x + y}\right)^2 = \operatorname{arccosec} \frac{b^2 + x^2}{b^2} - \frac{\pi}{4}$

47) $\operatorname{arctang} (x^3 + y^3) = \frac{1}{2} \arccos \frac{45431}{47881}$

$\arccos \sqrt{\frac{6(x + 4) + 1}{12}} = \operatorname{arccosec} \sqrt{2}$

Vergl. Dr. Láska: Formelnsammlung § 1. Daselbst die Auflösung der Beispiele 12) und 13).

III. Ueber Grenzwerthe.

Es sei

$$\lim \delta = 0, \qquad \lim \omega = \infty$$

so wird

$$\lim \left(\frac{(1+\delta)^n - 1}{\delta}\right) = n$$

$$\lim \left(\frac{a^\delta - 1}{\delta}\right) = \log a$$

$$\lim (1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} = e$$

$$\lim \frac{\sin \delta}{\delta} = 1$$

Man bestimme folgende Grenzwerthe:

1) $\lim \dfrac{e^\delta - e^{\sin \delta}}{\delta - \sin \delta} = A$

Anl. Man schreibe

$$A = \lim \frac{\frac{e^\delta - 1}{\delta} \cdot \delta - \frac{e^{\sin \delta} - 1}{\sin \delta} \cdot \sin \delta}{\delta - \sin \delta}$$

2) $\lim \dfrac{\delta + a \log (a+\delta) - a \log a}{a - \sqrt{a^2 - \delta}} = B$

Anl.

$$B = -a \lim \left\{1 + \log \left(1 + \frac{\delta}{a}\right)^{\frac{a}{\delta}}\right\} : \frac{\left(1 - \frac{\delta}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}{\frac{\delta}{a^2}}$$

Folgende Gleichungen sind zu erweisen:

3) $\lim \dfrac{(a + b\,\delta)^n - a^n}{c\,\delta} = n\,\dfrac{b}{c}\,a^{n-1}$

4) $\lim \dfrac{a - \sqrt[n]{a^n - \delta^n}}{\delta^n} = \dfrac{1}{n a^{n-1}}$

5) $\lim \dfrac{\sqrt{a^2 + a\delta + \delta^2} - \sqrt{a^2 - a\delta + \delta^2}}{\sqrt{a+\delta} - \sqrt{a-\delta}} = \sqrt{a}$

6) $\lim \dfrac{(b + c \cos \delta + a \sin \delta)^n - (b + c \cos \delta)^n}{(b+c)^n\, a \sin \delta} = \dfrac{n}{b+c}$

7) $\lim \dfrac{\cos^n \delta - 1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} = -2n$

8) $lim \frac{(a\omega + b)^n - (a\omega)^n}{c\omega^{n-1}} = n \frac{b}{c} a^{n-1}$

9) $lim \frac{\log(1 + a \sin \delta)}{\sin \delta} = a$

10) $lim \left(\frac{a - b\delta}{a + b\delta}\right)^{\frac{1}{2b\delta}} = e^{-\frac{1}{a}}$

11) $lim \operatorname{cotg} \delta \cdot \log \left\{\frac{1 + a \sin \delta}{1 + b \operatorname{tgn} \delta}\right\} = a - b$

12) $lim \frac{\log(1 + n \arcsin \delta)}{\operatorname{arctg} \frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}}} = n$

13) $lim \left\{1 - \frac{\pi}{4} + \arcsin \sqrt{\frac{1 - \delta}{2}}\right\}^{\frac{1}{\arcsin \delta}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

14) $lim \left\{a^{\frac{e}{\omega}} - b^{-\frac{e}{\omega}}\right\} \omega = e \log a b$

15) $lim \left\{\frac{\pi}{4\delta} - \frac{\pi}{2\delta(e^{\pi\delta} - 1)}\right\} = \frac{\pi^2}{8}$

16) $lim \left\{2^\omega \operatorname{tg} \frac{a}{2^\omega}\right\} = a$

17) $lim \frac{\arccos(1 - \delta)}{\sqrt{\delta}} = \sqrt{2}$

Anl. Setze $\arccos(1 - \delta) = \alpha$ etc.

18) $lim \frac{\delta e^{\cos \delta}}{1 - \sin \delta - \cos \delta} = - e$

19) $lim \frac{\delta}{\operatorname{arccotg}\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)} = 1$

Anl. Setze $1 + \frac{1}{\delta} = \operatorname{cotg} \varepsilon$

20) $lim \frac{(1 - \delta) \sin \delta}{(1 + \delta) \operatorname{arctg} \frac{\delta}{1 + \delta^2}} = 1$

21) $lim \frac{\arcsin \frac{2\sqrt{\omega^2 - 1}}{\omega^2}}{\operatorname{arccotg} \frac{\omega^2 - 1}{2\omega}} = 1$

22) Bestimme

$lim \frac{1 - \sin x}{1 + \sin 3x}$ für $x = \frac{\pi}{2}$

Setzt man $x = \frac{\pi}{2} + \delta$, so findet man $\frac{1}{9}$ als Grenzwerth?

23) $\lim \dfrac{e^{\delta} - 1}{e^{\delta} \log(1 + \delta)} = -1$

24) $\lim \sqrt[\delta]{\dfrac{e^{\delta} + e^{-\delta}}{2}} = 1$

25) $\lim \dfrac{a^{\delta} - b^{\delta}}{\log(1 - \delta)} = \log \dfrac{b}{a}$

26) $\lim \operatorname{cosec} \delta \cdot \log(1 - \delta) = -1$

27) $\lim \left\{2 - \dfrac{a - \delta}{a}\right\}^{\operatorname{tg} \frac{a - \delta}{2a} \pi} = e^{\frac{2}{\pi}}$

28) $\lim \dfrac{a^{\log(1 - \delta)} - 1 + \delta}{\log(1 - \delta)} = \log a - 1$

29) $\lim \{\cos \delta + \arcsin \delta\}^{\operatorname{cotg} \delta} = e$

30) $\lim \left\{1 + \dfrac{2a}{\omega} \cos \varphi + \left(\dfrac{a}{\omega}\right)^2\right\}^{\frac{\omega - a}{2}} = e^{a \cos \varphi}$

31) $\lim \left\{\dfrac{a^{\sin \delta} - b^{\operatorname{tg} \delta} + c^{(1 + \delta)^n - 1} - d^{\log(1 + \delta)}}{(1 + \delta^n) - 1}\right\} = \log c \sqrt[n]{\dfrac{a}{b\,d}}$

32) $\lim \dfrac{\log\left\{\dfrac{4 + \pi}{4} - \operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{1 + \delta}{1 - \delta}}\right\} + \log(\cos \delta + n \sin \delta)}{\arcsin \dfrac{\delta}{2}} = 2n - 1$

33) $\lim \dfrac{\dfrac{n\pi}{4} - \sum\limits_{1}^{n} \arcsin \sqrt{\dfrac{1 - n\delta}{2}}}{\sum\limits_{1}^{n} e^{\sin n\delta} - n} = \dfrac{1}{2}$

Anl. Schreibe

$$\frac{n\pi}{4} - \sum_{1}^{n} \left[\arcsin \sqrt{\frac{1 - n\delta}{2}} - \arcsin \sqrt{\frac{1}{2}}\right] - n \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}$$

und beachte, dass

$$\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

34) $\lim \sum\limits_{n=0}^{n=r-1} \left\{\dfrac{e^{\delta} + e^{-\delta}}{2}\right\}^{\frac{n}{\delta^2}} = \dfrac{e^{\frac{r}{2}} - 1}{e^{\frac{1}{2}} - 1}$

35) $$\lim \sum_{n=0}^{n=r-1} \frac{n \log \{1+(n+1)\delta\}}{a^{n\delta} - b^{n\delta}} = \frac{r(r+1)}{2[\log a - \log b]}$$

36) $$\lim \left\{ \log \prod_1^r \left(1 + \frac{2\delta}{n\pi}\right)\right\} : \sqrt{1+\sin\delta} - 1 = \frac{4}{\pi} \sum_1^r \frac{1}{n}$$

37) $$\lim \prod_1^r (1 + n \arcsin \delta)^{\frac{1}{2n} \operatorname{tg} \frac{\pi(n-1)-\pi\delta}{2(n-1)}} = e^{\frac{4(r-1)}{2\pi}}$$

38) Welcher Grenze nähert sich der Bruch

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2n} + \sin\frac{2\pi}{2n} + \sin\frac{3\pi}{2n} + \cdots\cdots + \sin\frac{n\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi}{2n} + \frac{3\pi}{2n} + \cdots\cdots + \frac{n\pi}{2n}}$$

wenn n ins Unendliche wächst?

Summire Zähler und Nenner; man erhält als Grenzwerth $\frac{8}{\pi^2}$

39) Unter derselben Voraussetzung bestimme man den Grenzwerth des Bruches

$$\frac{\cos\frac{\pi}{2n} + \cos\frac{2\pi}{2n} + \cos\frac{3\pi}{2n} + \cdots\cdots + \cos\frac{n\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi}{2n} + \frac{3\pi}{2n} + \cdots\cdots + \frac{n\pi}{2n}}$$

Der Grenzwerth wie in 38).

Beweise folgende Gleichungen, in denen n ins Unendliche wächst:

40) $$\lim \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{(2k+1)\pi}{2n^2} = \lim \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n^2}} = \frac{2}{\pi}$$

41) $$\lim \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{3}{2}\right)^n \operatorname{tg} 2^{k-1} \left(\frac{\pi}{3^n}\right) \sec 2^k \left(\frac{\pi}{3^n}\right) =$$

$$\lim \left(\frac{3}{2}\right)^n \left\{ \operatorname{tg} \left(\frac{2}{3}\right)^n \pi - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3^n} \right\} = \pi$$

42) $$\lim \left\{ n \operatorname{arctg} x - \sum_{k=2}^{k=n} n \operatorname{arctg} \frac{x}{n(n-1)+x^2} \right\} = x$$

Man beachte, dass

$$\frac{x}{n(n-1)+x^2} = \frac{\frac{n}{x} - \frac{n-1}{x}}{1 + \frac{n}{x} \cdot \frac{n-1}{x}}$$

43) Es sei $a_n = \sqrt{\frac{1 + a_{n-1}}{2}}$ und $a_1 < 1$ gegeben; der Grenzwerth des Productes $a_1 a_2 \cdots a_n$ ist zu finden für das unendliche Wachsen des Stellenzeigers n.

44) Es sei $p_0 = 0$ und p_n als Function von n durch die Gleichung

$$p_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + p_n}{2}}$$

bestimmt; man finde den Grenzwerth der Function

$$\varphi(n) = 4^n (1 - p_n)$$

für $n = \infty$.

Anl. Man erinnere sich der Formeln:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}, \quad 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha$$

Man findet

$$\mathit{lim}\ a_1 a_2 \cdots a_n = \frac{a_1}{\arccos a_1} \sqrt{1 - a_1^2}$$

$$\mathit{lim}\ \varphi(n) = \frac{\pi^2}{8}$$

45) Es seien a und b zwei gegebene positive Grössen und

$$a_1 = \frac{1}{2}(a + b),\ b_1 = \sqrt{a_1 b}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1),\ b_2 = \sqrt{a_2 b_1}$$

$$a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2),\ b_3 = \sqrt{a_3 b_2} \text{ etc.}$$

allgemein $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ und $b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}}$; man bestimme *lim* a_n und *lim* b_n, für $n = \infty$.

Vergl. Gauss' Werke, II. Bd. Nouv. Ann. II. Ser. Tom. I.

46) Es sei $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$ und $b_n = a_{n-1}$; man bestimme den Grenzwerth von $\frac{a_n}{b_n}$, wenn n ins Unendliche wächst.

47) Es sei $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ und $b_n = a_{n-1}$; man finde $\lim \frac{a_n}{b_n}$, für $n = \infty$.

48) Es sei

$$a_0 = \frac{1}{2},\ a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ und } a_n$$

als Function von n durch die Gleichung

$$\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^2 = \left(\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right) + 2$$

bestimmt; der Grenzwerth von $A_n = \frac{2^n}{a_n}$ für $n = \infty$ ist zu berechnen.

49) Durch die Gleichung

$$b^2{}_n = \frac{b^3{}_{n-1}}{2b_{n-1} + b_{n-2}}$$

ist b_n als eine Function des Stellenzeigers n bestimmt; der Grenzwerth von $A_n = 2^n b_n$ ist zu finden, wenn n ins Unendliche wächst und $b_0 = 2$, $b_1 = \sqrt{2}$ ist.

Vergl. zu 46)—49). V. 9), 10).

50) Folgender Satz ist zu beweisen:

Es sei $\lim \frac{F(x + \delta) - F(x)}{\delta} = f(x)$, und $f(x)$ stets positiv und im Zustande fortwährender Abnahme von $x = a - 1$ anfangend; dann ist:

$$F(a+n) - F(a) < f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \cdots + f(a+n-1)$$
$$F(a+n)\,F(a) - f(a+n) + f(a) > f(a) + f(a+1) + \cdots + f(a+n-1).$$

Mit Hilfe dieses Satzes ermittle man folgende Grenzwerthe, für das unendliche Wachsen der positiven Grösse an:

51) $\lim \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} + \cdots + \frac{1}{a^2 + a - 1}\right]$

52) $\lim \left[\frac{1}{a \log a} + \frac{1}{(a+1)\log(a+1)} + \cdots + \frac{1}{(a^2 + a - 1)\log(a^2 + a - 1)}\right]$

53) $\lim \left[\frac{1}{\sqrt{a^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{a^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a^2 + 2a}}\right]$

54) Welchen Werth hat die Function

$$\frac{\sin(x - \alpha)}{\sin(y - \beta)}$$

für $x = \alpha$, $y = \beta$, wenn zugleich

a) $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \text{Const.}$

b) $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \text{Const.}$

Vergl. Grunerts Archiv, 32. Band.

IV. Ueber Stetigkeit und Unstetigkeit der Functionen.

Eine reelle einwertige Function

$$y = f(x)$$

wird an der Stelle $x = a$ stetig genannt, wenn $f(a)$ endlich und zugleich

$$\lim \{f(a + \delta) - f(a)\} = 0$$

oder für $\lim \delta = 0$

$$\lim \frac{f(a + \delta)}{f(a)} = 1$$

Beispiele:

1) $y = a - \frac{b}{(x - \alpha)^2} + \frac{c}{(x - \beta)^2}$

2) $y = a - \frac{b}{x - \alpha} + \frac{c}{x - \beta}$

3) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x - a}$ $\quad \lim f(a \pm \delta) = \pm \frac{\pi}{2}$

4) $y = 1 + e^{\frac{1}{x - a}}$ $\quad \lim f(a - \delta) = 1, \lim f(a + \delta) = \infty$

5) $y = 1 + e^{-\frac{1}{x - a}}$ $\quad \lim f(a - \delta) = \infty, \lim f(a + \delta) = 1$

6) $y = \sqrt{x^2 + (\alpha + \beta) x + \alpha\beta}$

7) $y = \log \frac{x - \alpha}{x - \beta}$

8) $y = \log (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

9) $y = x \operatorname{arcsec} (x^2 - 3x + 3)$

10) $y = \sqrt{\frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 3)(x - 4)}} \sin [\arccos (10 x + 5 x^2)]$

11) $y = b + \frac{a - b}{e^{e^{\frac{1}{x - a}}}}$

12) $y = \dfrac{1 + e^{\frac{1}{x}}(1 + x)}{(1 + e^{\frac{1}{x}})^2}$

13) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{\operatorname{arccot}(e^x - e^{-x})}$

14) $y = \dfrac{\sin[\operatorname{arctg} \sqrt[x]{e}]}{\operatorname{arctg}(\sec x)}$

15) $\operatorname{arcsec} \dfrac{x}{x^2 - 1} \cdot \operatorname{arctang} \dfrac{2x}{x^3 - 2} \cdot \operatorname{arccosec} \dfrac{x^3 - 3}{3x} \cdot \operatorname{arccot} \dfrac{x^2 - 4}{4x}$

16) $\arccos \left(\dfrac{a + \sqrt[x]{e}}{a - \sqrt[x]{e}} \right) \cdot \arcsin (\log e)^{\sqrt[x-1]{e}}$

17) Es sei $f(y) = ay^3 + by^2 + cy + d$
und $y = \sqrt{x^2 - 8x + 15}$;
für welche Werthe von y erleidet die Function $f(y)$ eine Unterbrechung ihres stetigen Verlaufes?

Eben so sind folgende Functionen bezüglich ihrer Continuität und Discontinuität zu untersuchen:

18) $f(y) = \sqrt{ay^2 + by + c}$
$y = \arccos (4x - x^3)$

19) $f(y) = \log (a + b + y) + \log (a + b - y)$
$y = \operatorname{arctang} \left(x + \sqrt{x^2 - mx + \dfrac{m^2 - n^2}{4}} \right)$

20) $f(y) = \operatorname{arcsec} (y^2 - 3y + 3)$
$y = b + \dfrac{a - b}{e^{e^{\frac{1}{x-a}}}}$

21) $f(y) = \dfrac{1}{\cos \dfrac{y}{2} + (\log y)^{\operatorname{tgn} y}}$
$y = \operatorname{arcsec} \dfrac{x}{\sqrt[3]{1 - x}}$

22) $f(y) = \operatorname{arctg} y$
$y = \operatorname{arctg} z$
$z = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$

V. Ueber Gleichungen.

1) Seien $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_m$
die Wurzeln der Gleichung
$$z^m - 1 = 0,$$
ferner μ eine beliebige positive ganze Zahl, so ist zu beweisen, dass
$$\Sigma \zeta^\mu = \begin{cases} m \\ 0 \end{cases}$$
wird, je nachdem μ durch m theilbar ist oder nicht.

2) Seien α_1, α_2 die Wurzeln der Gleichung
$$\alpha^2 + \alpha p + q = 0$$
Wie lautet die Gleichung, deren Wurzeln die fünf Werthe von
$$x = \sqrt[5]{\alpha_1} + \sqrt[5]{\alpha_2}$$
sind?

Antw. $x^5 - 5q^5 x^3 + 5q^{10} x + p = 0$

3) Man löse die Gleichungen
$$x^2 - 2y = a$$
$$y^2 - 2x\sqrt{c} = b$$
auf.

Anl. Man setze
$$x = \sqrt{\xi_1} + \sqrt{\xi_2} + \sqrt{\xi_3}$$
$$y = \sqrt{\xi_1 \xi_2} + \sqrt{\xi_1 \xi_3} + \sqrt{\xi_2 \xi_3}$$

4) a) Ist $x^3 - px^2 + qx - r = 0$
so kann vermittels der Substitution
$$x = y + \alpha$$
das Glied x nicht entfernt werden, wenn $p^2 < 3q$ ist. Man bestimme diejenige Substitution, die es ermöglicht.

Anl. Man bilde die Gleichung der reciproken Wurzeln.

b) Man zeige, dass die Gleichung
$$x^5 - px^4 + qx^3 - rx^2 + sx - t = 0$$
das Glied x nur dann algebraisch entfernt werden kann, wenn die Gleichung eine der folgenden Gestalten besitzt:
$$x^5 - px^4 + qx^3 - 2px^2 + 5x - t = 0$$
$$x^5 - px^4 + \frac{2}{5}p^2x^3 - \frac{2}{25}p^3x^2 + \frac{p^4}{125}x - t = 0$$

$$x^5 - 5x - t = 0$$
$$x^5 + qx^3 + 3x - t = 0$$

5) Man ändere die Gleichung

$$x^3 - \frac{ax^2}{m} + \frac{bx}{n} - \frac{c}{p} = 0$$

in eine andere, in der die Coefficienten ganzzahlig sind.

Antw. $x^3 - anp\,y^2 + bm^2np^2y + cm^3n^3p^2 = 0.$

6) Verwandle die Gleichung

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

deren Wurzel die Quadrate der gegebenen sind.

Antw. Die Transformierte hat genau dieselbe Gestalt.

7) Löse die (irreducible) Gleichung

$$x^3 - px + q = 0$$

durch die Substitution der Identität

$$x = \frac{1}{2}(x + y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2}\,\frac{x^2 + y^2}{x + y\sqrt{-1}}$$

auf.

Vgl. Matthiessen, Grundzüge der antik. u. mod. Algebra p. 212.

8) In der Gleichung

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

bilden die Wurzeln

a) eine arithmetische

b) eine geometrische

Reihe, welche Beziehung findet zwischen den Coefficienten statt?

9) In derselben Gleichung ist die Summe zweier Wurzeln gleich a, welche ist die Relation der Coefficienten und welche sind die Wurzeln?

10) Löse die cubische Gleichung

$$x^3 + px + q = 0$$

mit Hilfe der Substitution

a) $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$

b) $y = x^2 + ux + v$

Anl. Im letzten Falle bringe man die Gleichung auf die Form $y^3 - C = 0$

11) Beweise, dass wenn

I. $$x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + \cdots\cdots$$

sodann innerhalb der Gültigkeitsgrenzen

$$y = \frac{x}{a} - \frac{bx^2}{a^3} + \frac{2b^2 - ac}{a^5}x^3 + \frac{5abc - a^2d - 5b^3}{a^7}x^4 + \cdots$$

II. Wenn

$$x = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + \cdots$$

auch

$$y = \frac{x}{a} - \frac{bx^3}{a^4} + \frac{3b^2 - ac}{a^7}x^5 + \frac{8abc - a^2d - 12b^3}{a^{10}}x^7 + \cdots$$

Anmerkung. Man kann diese Reihenumkehrungen zur Auflösung der Gleichungen verwenden. Z. B.:

Es sei gegeben

$$x^3 - 2x = 5$$

Da x nahe an 2 ist, so setze man

$$x = y + 2$$

und man erhält

$$y^3 + 6y^2 + 10y = 1$$

setzt man nun

$$x = 1,\ a = 10,\ b = 6,\ c = 1$$

so wird nach I.

$$y = \frac{1}{10} - \frac{6}{1000} + \frac{52}{100000} + \cdots$$

also $$y = 2,\ 0946\cdots$$

12) Behandle ebenso

$$y^4 + 9x^3 + 23y^2 + 53y + 10 = 0$$

Man findet

$$y = -6{,}717\,667\cdots$$

13) Berechne x aus

$$x + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{5} + \frac{x^4}{7} + \cdots = \frac{1}{10}$$

Anl. Man setze

$$\frac{1}{10} = \frac{x + \alpha x^2}{1 + \beta x + \gamma x^2} = x + (\alpha - \beta)x^2 + (\beta^2 - \gamma - \alpha\beta)x^3 + (\alpha\beta^2 + 2\beta\gamma - \alpha\gamma - \beta^3)x^4 + \cdots$$

Es wird

$$x = 0{,}09383337\cdots$$

14) Auf ähnliche Art beweise man folgende Formel. Seien p die Procente, m die Mise, r die Rente und a die Zeit in Jahren, so ist nahezu

$$p = \frac{200\,(ar - m)}{(a+1)\,m} \cdot \left(\frac{m}{ra}\right)^{\frac{a-1}{3(a+1)}}$$

Anl. Man entwickele den in der bekannten Formel vorkommenden Ausdruck $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{a+1}$ nach dem binomischen Lehrsatz.

15) Welche Beziehung muss zwischen den Coefficienten der beiden Gleichungen

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$
$$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

bestehen, wenn sie eine Wurzel gemeinschaftlich haben sollen?

Anl. Zerlege beide Gleichungen in die Form

$$(x^2 + Ax + B)\,(x + \Theta)$$
$$(x^2 + A'x + B')\,(x + \Theta)$$

so erhält man zur Bestimmung von

$$A,\ A',\ B,\ B',\ \Theta$$

6 Gleichungen.

16) Untersuche in Bezug auf die Beschaffenheit der Wurzeln folgende Gleichungen:

a) $x^5 - 10x^3 + 6x + 1 = 0$

Antw. 5 reelle Wurzeln je eine zwischen $(-4, -3)$, $(0, 1)$, $(3,4)$ und zwei zwischen $(-1, 0)$

b) $x^4 - 4x^3 - 3x + 23 = 0$

Antw. Die reellen Wurzeln sind zwischen $(2, 3)$ und $(3, 10)$, die beiden imaginären haben einen Modull, der nahe an 0 ist.

c) $x^5 + x^4 + x^2 - 25x - 36 = 0$

Antw. Reelle Wurzeln zwischen $(-10, -2)$, $(-2, -1)$, $(1, 10)$ und imaginäre nahe an 0.

d) $x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101$

Antw. Reelle Wurzeln zwischen $(-10, -1)$, $(-1, 0)$, $(3, 10)$, zwei imaginäre zwischen $(2, 3)$.

17) Die sogenannte Regula falsi lässt sich am einfachsten wie folgt ableiten: Es sei

$$f(x) = 0, \qquad f(x_k) = f_k$$

wobei x_k einen Näherungswerth bezeichnet.

Man setze $\qquad ax + b = 0$

so wird $\qquad x = -\frac{b}{a}$

und die Coefficienten a und b sind zu bestimmen aus

$$a x_1 + b = f_1$$
$$a x_2 + b = f_2$$

Es ergiebt sich

$$x = -\frac{b}{a} = \frac{f_1 x_2 - f_2 x_1}{f_1 - f_2}$$

Man leite die analoge Formel für die Gleichungen

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0$$

ab, indem man das lineare System

$$ax + by + c = 0$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

zu Grunde legt, und wende das Resultat auf die Berechnung der Wurzel der beiden Gleichungen

$$f(xy) = x - y + 10 \log(x + y) - 170 = 0$$

$$\varphi(xy) = e^{\frac{x-y}{100}} + \sin(x + y)^0 - 3 = 0$$

Die Grösse $(x + y)^0$ soll in Graden genommen werden. Sie muss daher bei der Berechnung mit $\frac{\pi}{180} = 0{,}017453$ multipliciert werden, um sie im Bogen zu erhalten. Man findet

$$x = 321, \cdots \qquad y = 214, \cdots$$

18) Eliminiere x und y aus den Gleichungen:

$$x^2 + xy = a, \quad y^2 + xz = b, \quad z^2 + xy = c$$

Antw. $8z^8 - 20cz^6 - (2ab - 18c^2)z^4 - (a^3 + b^3 - 5abc + 7c^3)z^2 + (ab - c^2)^2 = 0$

19) Beweise, dass wenn

$$x\left\{a\sqrt{4x^2 - a^2} + b\sqrt{4x^2 - b^2} + c\sqrt{4x^2 - c^2}\right\} - abc = 0$$

und $\qquad 2p = a + b + c$

gesetzt wird, dass sodann

$$x = \frac{abc}{4} \frac{1}{\sqrt{p(p-a)(b-b)(p-c)}}$$

Vergl. Schlömilch's Handbuch p. 407 (1868).

VI. Ueber unendliche Reihen.

Man bestimme aus der in den folgenden Beispielen gegebenen recurrierenden Form des allgemeinen Gliedes u_n einer Reihe und so vielen unmittelbar auf einander folgenden Gliedern, als das Recursionsgesetz bedingt, die independente Form von u_n und beweise die Divergenz der Reihe:

$$u_n = \frac{(\sqrt[n+1]{a} - 1)(\sqrt[n-1]{a} - 1)}{(\sqrt[n]{a} - 1)^2} u_{n-1}, \quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{a} + 1}$$

Anl. Man schreibe

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{\sqrt[n+1]{a} - 1}{\sqrt[n]{a} - 1} : \frac{\sqrt[n]{a} - 1}{\sqrt[n-1]{a} - 1}$$

sodann wird

$$u_n = \frac{\sqrt[n+1]{a} - 1}{\sqrt[n]{a} - 1} \cdot f$$

wobei der Factor f aus der Bedingung bestimmt wird, dass für $n = 1$

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{a} + 1}$$

sein muss. Man findet $f = 1$.

Auf diese Art sind folgende Aufgaben zu behandeln:

1) $u_n = \frac{(2n+1)(3n-2)}{(3n+1)(2n-1)} u_{n-1}, \; u_0 = 1$

2) $u_n = \frac{(3n-2)(4n-2)}{(3n-5)(4n+2)} u_{n-1}, \; u_1 = \frac{1}{6}$

3) $u_n = \frac{n^2 - 1}{n^2} u_{n-1}, \; u_1 = 1$

4) $u_n = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} u_{n-1}, \; u_0 = \frac{1}{2}$

5) $u_n = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n+2)(2n-3)} u_{n-1}, \; u_1 = \frac{1.3}{2.4}$

6) $u_n = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\, u_{n-1},\ u_1 = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$

7) $u_n = \frac{(n+2)^{\frac{2n+3}{2}}}{(n+2)^{\frac{n+2}{2}}\, n^{\frac{n+1}{2}}}\, u_{n-1},\ u_0 = \frac{1}{2}$

8) $u_n = \cos\frac{x}{n}\, u_{n-1},\ u_1 = \cos x$

Sei durch $\sum_0^m a_k u_{n-k} = 0$

das Recursionsgesetz gegeben. Seien ferner

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots \alpha_m$$

die Wurzeln der Gleichung

$$\Sigma a_k x^{m-k} = 0$$

so lautet das allgemeine Glied in der indepedenten Form

$$u_n = \sum_1^m b_k \alpha_k^n$$

wobei die Coefficienten b_k aus den gegebenen Anfangsgliedern zu bestimmen sind.

Mit Hilfe dieses Satzes finde u_n aus

9) $u_n = u_{n-1} + u_{n-2},\quad u_1 = 1,\ u_2 = 2$

Antw. $u_n = \frac{(1-\sqrt{5})^n - (1+\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$

Reihe von Lamè. S. Nouv. Corr. Mathem. Tom I und V. Auch Cl. Stolz, Vorlesungen über allgem. Arithmetik II. Theil, p. 307.

10) $u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n-2}}{2},\ u_0 = 1,\ u_1 = \frac{1}{2}$

11) $u_n = \sqrt{u_{n-1}\, u_{n-2}},\quad u_0 = 2,\ u_1 = \frac{3}{2}$

Anl. Man logarithmiere und hat sofort den vorigen Fall vor sich.

Aus der in folgenden Beispielen gegebenen Summenformel S_n einer Reihe leite man das Glied u_n ab und entscheide über die Convergenz oder Divergenz der Reihe.

Anl. Sei S_n die Summe von n Gliedern, so wird

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \text{ sein.}$$

12) $S_n = \frac{3n + 2}{4n + 3}$

13) $S_n = \frac{2n + a}{3n + b}$

14) $S_n = \frac{(n + 1)(2n + 2)}{(2n + 1)(3n + 2)}$

15) $S_n = \frac{4n^2 - a^2}{9n^2 - b^2}$

16) $S_n = \frac{\frac{1}{2} n (n + 1)}{(2n + 1)^2}$

17) $S_n = \frac{(n + 1)^2}{a^2 [a^2 + 4 (n + 1)^2]}$

18) $S_n = \frac{\frac{1}{2} n (n + 1}{(4a^2 + 2n^2 + 2n + 1) - 4n^2 (n + 1)^2}$

19) $S_n = \frac{n (4a^2 - 2n - 1)}{(4a^2 + 2n^2 + 2n + 1)^2 - 4n^2 (n + 1)^2}$

20) $S_n = \frac{(nb + 1)(n + 1)}{[a^2 + (b - 1)^2][a^2 + \{(2n + 1) b + 1\}^2]}$

21) $S_n = \frac{\log 2 \ \log 4 \ \log 8 \ \log 16 \ \log 32 \ldots\ldots \log 2^n}{\log 3 \ \log 9 \ \log 27 \ \log 81 \ \log 243 \ldots \log 3^n}$

22) $S_n = \frac{3 . 5 . 7 \ldots\ldots (2n + 3)}{2 . 4 . 6 \ldots\ldots (2n + 2)} - 1$

23) $S_n = 1 - \frac{3 . 5 . 7 \ldots\ldots (2n + 3)}{4 . 6 . 8 \ldots\ldots (2n + 4)}$

24) $S_n = \frac{a}{a + c - b} \left[\frac{(a + c)(a + 2c) \ldots\ldots [a + (n + 1) c]}{b (b + c) \ldots\ldots (b + nc)} - 1\right]$

25) $S_n = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r!} - \frac{1}{(n + 2)(n + 3) \ldots\ldots (n + r + 1)}\right)$

26) $S_n = \frac{1 - \cos n x}{2 \sin \frac{x}{2}}$

27) $S_n = \frac{2^{n+1} + 2^n - 2n - 3}{2^{n-1}}$

28) $S_n = \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{2 . 3^{n-1}}$

29) $S_n = \frac{a + (a - b) x - (a + nb) x^n + [a + (n - 1) b] x^{n+1}}{(1 - x)^2}$

30) $S_n = \frac{1}{1 - x} + \frac{2x}{(1 - x)^2} + \frac{x^2}{(1 - x)^3} - \frac{n(n + 1)}{2(1 - x)} x_n \frac{nx^n}{(1 - x)^2} - \frac{x^n}{(1 - x)^3}$

31) $S_n = \frac{1-x^n}{1-x} a + \frac{1-x^{n-1}}{(1-x)^2} bx + \frac{1-x^{n-2}}{(1-x)^3} cx^2 + \frac{1-x^{n-3}}{(1-x)^4} dx^3 - \frac{[b(n-1)_1 + c(n-1)_2 + d(n-1)_3]x^n}{1-x} - \frac{[c(n-2)_1 + d(n-2)_2]x^n}{(1-x)^2} - \frac{d(n-3)_1 x^n}{(1-x)^3}$

Für folgende Reihen ist das summatorische Glied zu entwickeln. Welche von diesen Reihen sind convergent, welche divergent, und welche Summe besitzen die convergenten Reihen?

32) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \cdots\cdots$

33) $\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+2)(k+3)} + \frac{1}{(k+3)(k+4)} + \cdots$

34) $\frac{7}{4} + \frac{17}{4.9} + \frac{31}{9.16} + \frac{49}{16.25} + \frac{71}{25.36} + \cdots\cdots$

35) $\frac{2}{1.4.6} + \frac{3}{2.5.7} + \frac{4}{3.6.8} + \frac{5}{4.7.9} + \cdots\cdot$

36) $\frac{2}{1.3.5.7} + \frac{3}{3.5.7.9} + \frac{4}{5.7.9.11} + \frac{5}{7.9.11.13} + \cdots\cdot$

37) $\frac{1}{1.3.5.7} + \frac{1}{3.5.7.9} + \frac{1}{5.7.9.11} + \frac{1}{7.9.11.13} + \cdots\cdots$

38) $\frac{1}{1.3.4.5} + \frac{4}{2.4.5.6} + \cdots\cdots + \frac{n(n+2)(n+3)(n+4)}{n^2-n+1} + \cdots\cdot$

39) $\frac{5}{1.2.4.5} + \frac{5}{2.3.5.6} + \cdots\cdots + \frac{n^2-3n+7}{n(n+1)(n+3)(n+4)} + \cdots\cdot$

40) $\frac{1}{(4a^2+1^2)(4a^2+3^2)} + \frac{2}{(4a^2+3^2)(4a^2+5^2)} + \frac{3}{(4a^2+5^2)(4a^2+7^2)} + \frac{4}{(4a^2+7^2)(4a^2+9^2)} + \cdots\cdot$

41) $\frac{1}{a^2(a^2+4)} + \frac{3}{(a^2+4)(a^2+4.2^2)} + \frac{5}{(a^2+4.2^2)(a^2+4.3^2)} + \frac{7}{(a^2+4.3^2)(a^2+4.4^2)} + \cdots$

42) $\frac{1}{(4a^2+4.1^2+1)^2-16.1^2} + \frac{2}{(4a^2+4.2^2+1)^2-16.2^2} + \frac{3}{(4a^2+4.3^2+1)^2-16.3^2} + \cdots$

43) $\frac{4(a^2-1^2)+1}{(4a^2+4.1^2+1)^2-16.1^2} + \frac{4(a^2-2^2)+1}{(4a^2+4.2^2+1)^2-16.2^2} + \frac{4(a^2-3^2)+1}{(4a^2+4.3^2+1)^2-16.3^2} + \cdots$

44) $ab + (a + d)\,bq + \cdots\cdots [a + (n + 1)d]\,bq^{n-1} + \cdots$

45) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^4 + \cdots\cdots$

46) $2 + \frac{7}{2}x + \frac{17}{4}x^2 + \frac{39}{8}x^3 + \frac{89}{16}x^4 + \cdots$

47) $1 + \frac{2.3}{1.2}x + \frac{3.4}{1.2}x^2 + \frac{4.5}{1.2}x^3 + \cdots\cdots$

48) $1 + \frac{2.3.4}{1.2.3}x + \frac{3.4.5}{1.2.3}x^2 + \frac{4.5.6}{1.2.3}x^3 + \cdots\cdots$

49) $+ 1 \frac{k!}{(k-1)!}x + \frac{(k+1)!}{2!(k-1)!}x^2 + \frac{(k+2)!}{3!(k-1)!}x^3 + \cdots$

50) $a^m + (ax)^m + (ax^2)^m + (ax^3)^m + \cdots\cdots$

51) $\frac{\operatorname{tang} x \,.\, \operatorname{tang} 2x}{\operatorname{tang} 2x - \operatorname{tang} x} + \frac{\operatorname{tang} 2x \,.\, \operatorname{tang} 4x}{\operatorname{tang} 4x - \operatorname{tang} 2x} + \frac{\operatorname{tang} 3x \,.\, \operatorname{tang} 6x}{\operatorname{tang} 6x - \operatorname{tang} 3x} + \cdots$

52) $\cos x \cdot \cos y + \cos 2x \cdot \cos 2y + \cos 3x \cdot \cos 3y +$
$+ \cos 4x \cdot \cos 4y + \cdots$

53) $\operatorname{tang} x \cdot \sec 2x + \operatorname{tang} 2x \cdot \sec 4x + \operatorname{tang} 4x \cdot \sec 8x +$
$+ \operatorname{tang} 8x \cdot \sec 16x + \cdots$

54) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x + \cdots$

Man untersuche folgende Reihen mit Zuhilfenahme des Quotienten $\frac{u_{n-1}}{u_n}$ in Betreff ihrer Convergenz oder Divergenz:

Ist *lim* $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, so ist die Reihe convergent, für *lim* $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ ist sie divergent, für *lim* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ unentschieden.

55) $1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2.3.4}{3.5.7} + \frac{2.3.4.5}{3.5.7.9} + \cdots\cdots$

56) $1 + \frac{2}{1} + \frac{2.3}{1.4} + \frac{2.3.4}{1.4.7} + \frac{2.3.4.5}{1.4.7.10} + \cdots$

57) $1 + \frac{2}{9} + \frac{2.5}{9.11} + \frac{2.5.8}{9.11.13} + \frac{2.5.8.11}{9.11.13.15} + \cdots\cdots$

58) $1 + \frac{1}{8} + \frac{1.5}{8.11} + \frac{1.5.9}{8.11.14} + \frac{1.5.9.13}{8.11.14.17} + \cdots\cdots$

59) $1 + \frac{1.2}{1.4} + \frac{1.2}{1.4}\cdot\frac{2.3}{3.7} + \frac{1.2}{1.4}\cdot\frac{2.3}{3.7}\cdot\frac{3.4}{5.10} + \frac{1.2}{1.4}\cdot\frac{2.3}{3.7}\cdot\frac{3.4}{5.10}\cdot\frac{4.5}{7.10} + \cdots$

60) $1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6} + \frac{1.3}{2.5}\cdot\frac{4.6}{6.9} + \frac{1.3.5}{2.5.8}\cdot\frac{4.6.8}{6.9.12} + \frac{1.2.5.7}{2.5.8.11}\cdot\frac{4.6.8.10}{6.9.12.15} + \cdots$

61) $1 + \frac{1.1}{1.3} + \frac{1.1.4.5}{1.3.6.7} + \frac{1.1.4.5.7.9}{1.3.6.7.11.11} + \frac{1.1.4.5.7.9.10.13}{1.3.6.7.11.11.15.16} + \cdots$

62) $1 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1.4}{5.7}\cdot\frac{1.6}{7.13} + \frac{1.4.7}{5.7.9}\cdot\frac{1.6.11}{7.13.19} + \frac{1.4.7.10}{5.7.9.11}\cdot\frac{1.6.11.16}{7.13.19.25} + \cdots$

$$63)\ 1+\frac{1}{7}+\frac{1.10}{7.18}+\frac{1.10.25}{7.18.33}+\frac{1.10.25.46}{7.18.33.52}+\cdots\cdots$$

$$64)\ 1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1.2}{4.6}\cdot\frac{1.3}{7.9}\cdot\frac{1.4}{9.11}+\frac{1.2.3}{4.6.8}\cdot\frac{1.3.5}{7.9.11}\cdot\frac{1.4.7}{9.11.13}+$$
$$+\frac{1.2.3.4}{4.6.8.10}\cdot\frac{1.3.5.7}{7.9.11.11}\cdot\frac{1.4.7.10}{9.11.13.15}+\cdots$$

$$65)\ \frac{a}{c}+\frac{a(a+b)(2a+b)}{c(a+d)(2c+d)}+\frac{a(a+b)(2a+b)}{c(c+d)(2c+d)}\cdot\frac{(2a+b)(4a+b)}{(2c+d)(4c+d)}+$$
$$+\frac{a(a+b)(2a+b)(3a+b)}{c(c+d)(2c+d)(3c+d)}\cdot\frac{(2a+b)(4a+b)(6a+b)}{(2c+d)(4c+d)(6c+d)}+\cdots$$

$$66)\ \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\operatorname{tang}\frac{\pi}{8}+\frac{1}{8}\operatorname{tang}\frac{\pi}{16}+\cdots\cdots$$

$$67)\ 1+\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{4.6}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3+\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5}{4.6.8}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4+\cdots$$

$$68)\ \frac{1^4}{a}+\frac{2^4}{a^2}+\frac{3^4}{a^3}+\frac{4^4}{a^4}+\cdots\cdots$$

$$69)\ \frac{1}{e^x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^{\frac{x}{2}}+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{e^{\frac{x}{4}}+1}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{e^{\frac{x}{8}}+1}+\cdots$$

$$70)\ 1+2\cdot\sin\frac{\pi}{4}+2\sin\frac{\pi}{4}\cdot 3\sin\frac{\pi}{6}+2\sin\frac{\pi}{4}\cdot 3\sin\frac{\pi}{6}\cdot 4\sin\frac{\pi}{8}+\cdots$$

Folgende Reihen sind bezüglich ihrer Convergenz oder Divergenz mittelst des Theoremes, dass die beiden unendlichen Reihen $u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots$ und $u_0+2u_1+4u_3+8u_7+16u_{15}+\cdots$ gleichzeitig convergieren und divergieren, zu untersuchen.

Vergl. Cauchy, „Cours d'analyse de l'école polyt." Paris 1821.

$$71)\ \log 1+\log\sqrt{2}+\log\sqrt[3]{3}+\log\sqrt[4]{4}+\log\sqrt[5]{5}+\cdots$$

$$72)\ 1+\frac{1}{2}l\,2+\frac{1}{3}l\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}l\left(\frac{4}{3}\right)^3+\frac{1}{5}l\left(\frac{5}{4}\right)^4+\cdots$$

$$73)\ 1+\frac{\sqrt[5]{3}-\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{2}}+\frac{\sqrt[5]{4}-\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{3}}+\frac{\sqrt[5]{5}-\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{4}}+\cdots$$

$$74)\ 1+(\sqrt{e}-1)+(\sqrt[3]{e}-1)+(\sqrt[4]{e}-1)+\cdots\cdots$$

$$75)\ 1+\left[a^{\frac{e}{2}}-(a+1)^{-\frac{e}{2}}\right]+\left[a^{\frac{e}{3}}-(a+1)^{-\frac{e}{3}}\right]+$$
$$+\left[a^{\frac{e}{4}}-(a+1)^{-\frac{e}{4}}\right]+\cdots$$

76) $\log x + \frac{1}{2} \log \frac{x}{2} + \frac{1}{3} \log \frac{x}{3} + \frac{1}{4} \log \frac{x}{4}$

77) $\log x + \frac{1}{2} \log 2x + \frac{1}{3} \log 3x + \frac{1}{4} \log 4x + \cdots\cdots$

78) $x^m + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^m + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^m + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{4}\right)^m + \cdots\cdots$

79) $1 + \frac{\sqrt[4]{1+2x} - \sqrt[4]{2x}}{\sqrt[4]{2}} + \frac{\sqrt[4]{1+3x} - \sqrt[4]{3x}}{\sqrt[4]{3}} + \frac{\sqrt[4]{1+4x} - \sqrt[4]{4x}}{\sqrt[4]{4}} + \cdots$

80) $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2 \sin 2x} + \frac{1}{3 \sin 3x} + \frac{1}{4 \sin 4x} + \cdots\cdots$

81) $\sin x + \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} + \frac{2}{3} \sin \frac{x}{3} + \frac{3}{4} \sin \frac{x}{4} + \cdots\cdots$

Man beurtheile folgende Reihen in Betreff ihrer Convergenz oder Divergenz mittelst des Ausdruckes $n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

Ist $\lim n \left[1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right] > +1$, so convergiert die Reihe, ist dagegen der Grenzwerth $< = 1$, so divergiert sie. Im Falle, wo der Grenzwerth $= 1$, bleibt es unentschieden, ob die Reihe convergiert oder divergiert.

Vergl. Crelle, Journal XI, p. 309, wo die allgemeinere Form

$$\lim n \left\{1 - \frac{f(u_{n+1})}{f(u_n)}\right\}$$

discutiert wird.

82) $1 + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{8}}{2\sqrt{5}} +$

$+ \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{8}}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{3\sqrt{7} - \sqrt{11}}{3\sqrt{7}} +$

$+ \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{8}}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{3\sqrt{7} - \sqrt{11}}{3\sqrt{7}} \cdot \frac{4\sqrt{9} - \sqrt{14}}{4\sqrt{9}}$

83) $\log\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} \log\left(1 + \frac{1}{3}\right) +$

$+ \frac{1}{4} \log\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \cdots\cdots$

84) $1 + \frac{1}{a^{\sqrt{\log 2}}} + \frac{1}{a^{\sqrt{\log 3}}} + \frac{1}{a^{\sqrt{\log 4}}} + \cdots\cdots$

85) $1 - x^2 - x^2\left[1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^2\right] -$

$- x^2\left[1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^2\right]\left[1 - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^3\right] -$

$- x^2\left[1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^2\right]\left[1 - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^3\right]\left[1 - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^4\right] - \cdots$

86) $\frac{\sin 1}{1} + \frac{\sin \frac{1}{2}}{2} + \frac{\sin \frac{1}{3}}{3} + \frac{\sin \frac{1}{4}}{4} + \cdots\cdots$

87) $1 + \frac{2}{4}\cos\frac{x}{2} + \frac{2}{4}\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{3}{5}\cos\frac{x}{3} +$

$+ \frac{2}{4}\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{3}{5}\cos\frac{x}{3}\cdot\frac{4}{6}\cos\frac{x}{4} + \cdots\cdot$

88) $\operatorname{arctang} x + \frac{1}{2}\operatorname{arctang}\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{arctang}\frac{x}{3} +$

$+ \frac{1}{4}\operatorname{arctang}\frac{x}{4} + \cdots\cdot$

89) $1 + \left(1 - 2\operatorname{tang}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) + \left(1 - \frac{2}{1}\operatorname{tang}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\left(1 - \frac{2^2}{2}\operatorname{tang}\frac{\sqrt{\pi}}{4}\right) +$

$+ \left(1 - \frac{2}{1}\operatorname{tang}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\left(1 - \frac{2^2}{2}\operatorname{tang}\frac{\sqrt{\pi}}{4}\right)\left(1 - \frac{2^3}{3}\operatorname{tang}\frac{\sqrt{\pi}}{8}\right) + \cdots\cdot$

Man untersuche folgende Reihen bezüglich ihrer Convergenz oder Divergenz mittelst des Gauss'schen Kennzeichens.

Sei $k > 1$ und

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^k + an^{k-1} + bn^{k-2} + \ldots m}{n^k + An^{k-1} + Bn^{k-2} + \ldots M}$$

so ist die Reihe convergent, wenn

$$A - a > 1$$

Gauss, Ges. Schriften. Bd. III. p. 139.

90) $1 + \frac{2}{5} + \frac{2.3}{5.6} + \frac{2.3.4}{5.6.7} + \frac{2.3.4.5}{5.6.7.8} + \cdots\cdots$

91) $1 + \frac{1.2}{3.5} + \frac{1.2}{3.5}\cdot\frac{2.3}{4.6} + \frac{1.2}{3.5}\cdot\frac{2.3}{4.6}\cdot\frac{3.4}{5.7} +$

$+ \frac{1.2}{3.5}\cdot\frac{2.3}{4.6}\cdot\frac{3.4}{5.7}\cdot\frac{4.5}{6.8} + \cdots\cdots$

92) $\frac{a}{b} + \frac{a(a+1)(b+1)}{b(2a+1)(2b+1)} + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(2a+1)(2a+2)}\cdot\frac{(b+1)(b+2)}{(2b+1)(2b+2)} +$

$+ \frac{a(a+1)(a+2)(a+3)}{b(2a+1)(2a+2)(2a+3)}\cdot\frac{(b+1)(b+2)(b+3)}{(2b+1)(2b+2)(2b+3)} + \cdots\cdots$

93) $\frac{1}{2^2} + \frac{1^2}{3^2} \cdot \frac{3}{4^2} + \frac{1^2 . 3^2}{2^2 . 4^2} \cdot \frac{5}{6^2} + \frac{1^2 . 3^2 . 5^2}{2^2 . 4^2 . 6^2} \cdot \frac{7}{8^2} + \cdots\cdots$

94) $1 + (m)_1 (p)_1 + (m)_2 (p)_2 + (m)_3 (p)_3 + (m)_4 (p)_4 + \cdots\cdots$

95) $a - (a)_1 (a-1) + (a)_2 (a-2) - (a)_3 (a-3) + (a)_4 (a-4) - \cdots$

96) $\frac{1}{a^2 + 1^2} - \frac{m^2 - 1^2}{(a^2 + 1^2)(a^2 + 3^2)} + \frac{(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)}{(a^2 + 1^2)(a^2 + 3^2)(a^2 + 5^2)} -$

$- \frac{(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)(m^2 - 5^2)}{(a^2 + 1^2)(a^2 + 3^2)(a^2 + 5^2)(a^2 + 7^2)} + \cdots$

97) $(a + 1) \cdot \frac{1}{2} + 11\, a \cdot \frac{1}{2^2 . 4} + 21\, (a - 1) \cdot \frac{1^2}{2^2 . 4^2 . 6} +$

$+ 31\, (a - 2) \cdot \frac{1^2 . 3^2}{2^2 . 4^2 . 6^2 . 8} + 41\, (a - 3) \cdot \frac{1^2 . 3^2 . 5^2}{2^2 . 4^2 . 6^2 . 8^2 . 10} + \cdots$

98) $\frac{x}{a^2 + x^2} + \frac{x + 1}{a^2 + (x + 1)^2} + \frac{x + 2}{a^2 + (x + 2)^2} + \frac{x + 3}{a^2 + (x + 3)^2} + \cdots\cdots$

99) $1 \left(\frac{x}{1 - x^2} - \frac{x}{2^2 - x^2}\right) + 2 \left(\frac{x}{3^2 - x^2} - \frac{x}{4^2 - x^2}\right) +$

$+ 3 \left(\frac{x}{5^2 - x^2} - \frac{x}{6^2 - x^2}\right) + \cdots\cdot$

100) $1 - \frac{1}{2x + 3}\left(m - \frac{1}{2}\right)_1 + \frac{1 . 3}{(2x + 3)(2x + 5)} \cdot \left(m - \frac{1}{2}\right)_2 -$

$- \frac{1 . 3 . 5}{(2x + 3)(2x + 5)(2x + 7)} \cdot \left(m - \frac{1}{2}\right)_3 + \cdots\cdots$

Folgende Reihen prüfe man in Bezug ihrer Convergenz oder Divergenz und bediene sich hiebei des Ausdruckes $n \log \left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$

Die Reihe ist convergent, wenn

$$\lim n \log \left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) > 1$$

Schlömilch, Handbuch der algebraischen Analys. 4. Aufl. p. 109.

101) $1 + \sqrt[3]{12 \cdot \frac{2!}{4!}} + \sqrt[3]{12 \cdot \frac{3!}{5!}} + \sqrt[3]{12 \cdot \frac{4!}{6!}} + \sqrt[3]{12 \cdot \frac{5!}{7!}} +$

$+ \sqrt[3]{12 \cdot \frac{6!}{8!}} + \cdots$

102) $1 + \sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt[6]{\frac{3^3 . 4^2}{4^3 . 6^2}} + \sqrt[24]{\frac{3^{12} . 4^8 . 5^6}{4^{12} . 6^8 . 8^6}} + \sqrt[120]{\frac{3^{60} . 4^{40} . 5^{30} . 6^{24}}{4^{60} . 6^{40} . 8^{30} . 10^{24}}} + \cdots$

103) $1 + e^{-\frac{4}{2}} + e^{-\left(\frac{4}{2} + \frac{7}{2.3}\right)} + e^{-\left(\frac{4}{2} + \frac{7}{2.3} + \frac{10}{3.5}\right)} +$
$+ e^{-\left(\frac{4}{2} + \frac{7}{2.3} + \frac{10}{3.5} + \frac{13}{4.7}\right)} + e^{-\left(\frac{4}{2} + \frac{7}{2.3} + \frac{10}{3.5} + \frac{13}{4.7} + \frac{16}{5.9}\right)} + \cdots$

104) $1 + e^{-\frac{3}{1.1}} + e^{-\left(\frac{3}{1.1} + \frac{5}{2.5}\right)} + e^{-\left(\frac{3}{1.1} + \frac{5}{2.5} + \frac{7}{3.9}\right)} +$
$+ e^{-\left(\frac{3}{1.1} + \frac{5}{2.5} + \frac{7}{3.9} + \frac{9}{4.13}\right)} + \cdots$

105) $1 + \sqrt{\frac{2}{4}} \cdot e^{\arcsin \frac{\pi}{4}} + \sqrt{\frac{2.5}{4.7}} \cdot e^{\arcsin \frac{\pi}{8}} +$
$+ \sqrt{\frac{2.5.10}{4.7.12}} \cdot e^{\arcsin \frac{\pi}{12}} + \sqrt{\frac{2.5.10.17}{4.7.12.19}} \cdot e^{\arcsin \frac{\pi}{16}} + \cdots\cdots$

Folgende Reihen sind bezüglich ihrer Convergenz oder Divergenz mittelst des Ausdruckes $\frac{\log\left(\frac{1}{u_n}\right)}{\log n}$ zu untersuchen:

Eine Reihe ist convergent, wenn

$$\lim \left[\frac{1}{\log n} \log\left(\frac{1}{u_n}\right)\right] > 1$$

106) $\frac{1}{2} + \frac{2^2}{3^2\sqrt{2}} + \frac{3^3}{4^3\sqrt{4}} + \frac{4^4}{5^4\sqrt{3}} + \cdots\cdots$

107) $2 + \frac{3^2}{2^4} + \frac{4^3}{3^5} + \frac{5^4}{4^6} + \cdots\cdots$

108) $\frac{1}{2^m - 1} + \frac{2^{m - \frac{3}{2}}}{3^m - 2^m} + \frac{3^{m - \frac{3}{2}}}{4^m - 3^m} + \frac{4^{m - \frac{3}{2}}}{5^m - 4^m} + \cdots\cdots$

109) $\frac{a^e - b^{-e}}{1} + \frac{a^{\frac{e}{2}} - b^{-\frac{e}{2}}}{2} + \frac{a^{\frac{e}{3}} - b^{-\frac{e}{3}}}{3} + \frac{a^{\frac{e}{4}} - b^{-\frac{e}{4}}}{4} + \cdots$

110) $\frac{2 \operatorname{tang} \frac{a}{2}}{1} + \frac{4 \operatorname{tang} \frac{a}{4}}{2^{4 \sin \frac{1}{2}}} + \frac{8 \operatorname{tang} \frac{a}{8}}{3^{6 \sin \frac{1}{3}}} + \frac{16 \operatorname{tang} \frac{a}{16}}{4^{8 \sin \frac{1}{4}}} + \cdots\cdots$

111) $\frac{1}{2^{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{5}}} \cdot \frac{1 + 2x}{1 + 3x} + \frac{1}{3^{\frac{5}{3} \cdot \frac{8}{9}}} \cdot \frac{2 + 2x}{2 + 3x} + \frac{1}{4^{\frac{7}{4} \cdot \frac{11}{13}}} \cdot \frac{3 + 2x}{3 + 3x} + \cdots$

112) $\frac{1}{2^3} + \frac{2^{\cos 2x}}{3^3} + \frac{3^{\cos 3x}}{4^3} + \frac{4^{\cos 4x}}{5^3} + \cdots\cdots$

113) $\frac{a^{\sin x} - 1}{1 \operatorname{tang} x} + \frac{a^{\sin \frac{x}{2}} - 1}{2^{\frac{5}{2}} \operatorname{tang} \frac{x}{2}} + \frac{a^{\sin \frac{x}{3}} - 1}{3^{\frac{7}{4}} \operatorname{tang} \frac{x}{3}} + \frac{a^{\sin \frac{x}{4}} - 1}{4^{\frac{9}{5}} \operatorname{tang} \frac{x}{4}} + \cdots$

114) $\frac{e^{\sqrt{e^x}}}{2^2} + \frac{e^{\sqrt[3]{e^{2x}}}}{3^2} + \frac{e^{\sqrt[4]{e^{3x}}}}{4^2} + \frac{e^{\sqrt[5]{e^{4x}}}}{5^2} + \cdots\cdots$

Man entscheide über die Convergenz oder Divergenz folgender Reihen und bediene sich hierzu der folgenden Regel:

Eine Reihe ist $\left\{\begin{matrix}\text{convergent}\\ \text{divergent}\end{matrix}\right\}$, jenachdem das erste nicht verschwindende Glied V_k aus der Reihe

$$V_1 = n\,l\,n - (n+1)\,l\,(n+1)\,\frac{u_{n+1}}{u_n},$$

$$V_2 = n\,l\,n\,ll(n+1) - (n+1)\,l(n+1)\,ll(n+1)\,\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

$$V_3 = n\,l\,n \cdot ll\,n \cdot lll\,n - (n+1)\,l(n+1)\,ll(n+1)\,lll(n+1)\,\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

etc.

$$V_m = \lim \left[\prod_{k=0}^{m} l^k\,n - \frac{u_{n+1}}{u_n} \prod_{k=0}^{m} l^k\,(n+1)\right]$$

$\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist *)

115) $1 + \frac{1}{2}\,\frac{l\left(\frac{1}{\sqrt[5]{e}}\right)}{l2} + \frac{1}{3}\,\frac{l\left(\frac{1}{\sqrt[5]{e}}\right)}{l2}\,\frac{l\left(\frac{2}{\sqrt[9]{e^2}}\right)}{l3} +$

$+ \frac{1}{4}\,\frac{l\left(\frac{1}{\sqrt[5]{e}}\right)}{l2}\,\frac{l\left(\frac{2}{\sqrt[9]{e^2}}\right)}{l3}\,\frac{l\left(\frac{3}{\sqrt[19]{e^3}}\right)}{l4} +$

$+ \frac{1}{5}\,\frac{l\left(\frac{1}{\sqrt[5]{e}}\right)}{l2}\,\frac{l\left(\frac{2}{\sqrt[9]{e^2}}\right)}{l3}\,\frac{l\left(\frac{3}{\sqrt[19]{e^3}}\right)}{l4}\,\frac{l\left(\frac{4}{\sqrt[33]{e^4}}\right)}{l5} + \cdots\cdots$

116) $1 + \frac{7}{3.2^2}\,\frac{l2}{l3} + \frac{7.26}{3.2^2.4.3^2}\,\frac{l3}{l4} + \frac{7.26.63}{3.2^2.4.3^2.5.4^2}\,\frac{l4}{l5} +$

$+ \frac{7.26.63.124}{3.2^2.4.3^2.5.4^2.6.5^2}\,\frac{l5}{l6} + \cdots\cdots$

*) Wo eine Verwechslung nicht möglich ist, schreiben wir l statt log.

117) $1 + \frac{1}{2}\,\frac{l\left(\frac{5}{3}\right)}{l2} + \frac{1}{2.3}\,\frac{l\left(\frac{5}{3}\right)}{l2}\cdot\frac{l\left(\frac{8.2^2}{5}\right)}{l3}\,\frac{l\left(\frac{11.3^3}{7}\right)}{l4} +$

$+ \frac{1}{2.3.4.5}\,\frac{l\left(\frac{5}{3}\right)}{l2}\cdot\frac{l\left(\frac{8.2^2}{5}\right)}{l3}\cdot\frac{l\left(\frac{11.3^3}{7}\right)}{l4}\cdot\frac{l\left(\frac{14.4^4}{9}\right)}{l5} + \dots$

118) $1 + \frac{1}{2}\,\frac{l\left(\frac{1}{1+x}\right)}{l2} + \frac{1}{3}\,\frac{l\left(\frac{1}{1+x}\right)}{l3}\,\frac{l\left(\frac{4}{2+x}\right)}{l3} +$

$+ \frac{1}{4}\,\frac{l\left(\frac{1}{1+x}\right)}{l2}\,\frac{l\left(\frac{4}{2+x}\right)}{l3}\,\frac{l\left(\frac{9}{8+x}\right)}{l4} + \dots$

119) $1 + \frac{l\sec x}{l2^2} + \frac{l\sec x}{l2^2}\cdot\frac{l2^2\sec x}{l3^3} +$

$+ \frac{l\sec x}{l2^2}\cdot\frac{l2^2\sec x}{13^3}\cdot\frac{l3^3\sec x}{l4^4} + \dots$

120) $1 + \frac{1}{2^2}\,\frac{l\left(\frac{1}{e^{\cos x}}\right)}{l2} + \frac{1}{2.3^2}\,\frac{l\left(\frac{1^2}{e^{\cos x}}\right)}{l2}\,\frac{l\left(\frac{2^3}{e^{\cos x}}\right)}{l3} +$

$+ \frac{1}{2.3.4^2}\,\frac{l\left(\frac{1^2}{e^{\cos x}}\right)}{l2}\,\frac{l\left(\frac{2^3}{e^{\cos x}}\right)}{l3}\,\frac{l\left(\frac{3^4}{e^{\cos x}}\right)}{l4} +$

$+ \frac{1}{2.3.4.5^2}\,\frac{l\left(\frac{1^2}{e^{\cos x}}\right)}{l2}\,\frac{l\left(\frac{2^3}{e^{\cos x}}\right)}{l3}\,\frac{l\left(\frac{3^4}{e^{\cos x}}\right)}{l4}\,\frac{l\left(\frac{4^5}{e^{\cos x}}\right)}{l5} + \dots$

121) $1 + (1 - \cos x) + (1 - \cos x)\left(1 - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right) +$

$+ (1 - \cos x)\left(1 - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}\right) +$

$+ (1 - \cos x)\left(1 - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\cos\frac{x}{4}\right) + \dots$

Bei folgenden Reihen lässt sich der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ auf die Form $\alpha - \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n^2}$ bringen; man entscheide aus der Beschaffenheit von α und β über die Convergenz oder Divergenz der Reihen.

Wenn $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha - \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n^2}$, so convergiert oder divergiert die Reihe, je nachdem $\alpha <$ oder > 1 ist, und für $\alpha = 1$ nur dann, wenn $\beta > 1$. Denn es ist $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha$ und wenn

$\alpha = 1$, $\lim n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \beta$. Sollte auch $\beta = 1$ sein, so muss

$\lim \left[n\, l\, n - (n+1)\, l(n+1) \frac{u_{n+1}}{u_n}\right] = < -1$ sein.

Schlömilch, „Notiz über die Convergenz und Divergenz unendlicher Reihen" in Schlömilchs Zeitschrift für Mathem. u. Physik. 5. Heft. Siehe auch: Kummer, „Ueber die Conv. und Diverg. der unendlichen Reihen" in Crelles Journal für reine und angewandte Mathem., 13. Band, 2. Heft, und Weierstrass, „Ueber die Theorie der analytischen Fakultäten" im 1. Hefte des 51. Bandes desselben Journals.

122) $1 + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{8}} + \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{9}} + \cdots$

123) $1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{\sqrt{4}} +$
$+ \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots$

124) $1 + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{6}} + \frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{7}} + \frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{8}} + \cdots$

125) $1 + \frac{1}{2}\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{7}} + \frac{\sqrt[6]{2}}{2}\frac{\sqrt[3]{9.17}}{\sqrt{7.11}} + \frac{\sqrt[6]{3}}{4}\frac{\sqrt[3]{9.17.25}}{\sqrt{7.11.15}} +$
$+ \frac{\sqrt[6]{4}}{5}\frac{\sqrt[3]{9.17.25.33}}{\sqrt{7.11.15.19}} + \cdots.$

126) $1 + \frac{2}{1.2}\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{a}}} + \frac{2.5}{1.2.2.3}\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{a}}\right)} +$
$+ \frac{2.5.10}{1.2.2.3.3.4}\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{a}}\right)\left(1 - \frac{1}{3\sqrt{a}}\right)} +$
$+ \frac{2.5.10.17}{1.2.2.3.3.4.4.5}\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{a}}\right)\left(1 - \frac{1}{3\sqrt{a}}\right)\left(1 - \frac{1}{4\sqrt{a}}\right)} + \cdots$

127) $1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^{\left(1 + \frac{1}{2}\right)}} + \frac{1}{e^{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)}} + \frac{1}{e^{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}} + \cdots$

128) $1 + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{3}\cos x\cdot\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3} +$
$+ \frac{1}{5}\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{4} + \cdots.$

Für folgende Reihen ist die Regel zu benützen:

Eine Reihe convergiert, wenn

$$lim \sqrt[n]{u_n} < 1 \text{ für } lim\, n = \infty.$$

Um dieses Kriterium zu erweisen, vergleiche man die gegebene Reihe mit der geometrischen

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots\cdot\cdot$$

129) $\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} + \cdots$

130) $1 + \frac{3^2}{4^2} + \frac{4^3}{6^3} + \frac{5^4}{8^4} + \frac{6^5}{10^5} + \cdots$

131) $\frac{a+1}{a}x + \left(\frac{a+2}{a+1}x\right)^2 + \left(\frac{a+3}{a+2}x\right)^3 + \cdots$

Beurtheile die Convergenz oder Divergenz der folgenden Reihen vermittels des Theorems:

Eine Reihe convergiert, wenn zugleich

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha} \text{ und } lim\, n\alpha > 1.$$

Vergl. Stern, Lehrbuch der algebr. Analys. p. 100.

132) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7} + \cdots\cdot$

133) $\frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} + \cdots\cdot$

134) $1 + \frac{2}{3} + \frac{2.4}{3.5} + \frac{2.4.6}{3.5.7} + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9} + \cdots$

Man beurtheile noch folgende Reihen bezüglich ihrer Convergenz oder Divergenz:

135) $1 + \frac{1}{1.3} + \frac{1.2}{3.5} + \frac{1.2.3}{3.5.7} + \frac{1.2.3.4}{3.5.7.9} + \cdots\cdot$

136) $\frac{1}{1^2.3^2} + \frac{2}{3^2.5^2} + \frac{3}{5^2.7^2} + \frac{4}{7^2.9^2} + \cdots\cdot$

137) $\frac{2}{1.3.5.7} + \frac{3}{3.5.7.9} + \frac{4}{5.7.9.11} + \frac{5}{7.9.11.13} + \cdots\cdot$

138) $\frac{7}{1.1.5} + \frac{19}{4.5.17} + \frac{31}{7.9.29} + \frac{43}{10.13.41} + \cdots\cdot\cdot$

139) $1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{3} - \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.1}{7.9}\cdot\frac{3.5}{3.11} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1.1.3}{7.9.11}\cdot\frac{3.5.7}{3.11.19} + \cdots$

140) $1 + \frac{1}{1.4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3.7}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 +$

$+ \frac{1}{5.10}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 - \frac{1}{7.13}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2 + \cdots$

141) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) - \frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right) + \cdots$

142) $\frac{1}{(4a^2+1^2)(4a^2+3^2)} + \frac{2}{(4a^2+3^2)(4a^2+5^2)} +$

$+ \frac{3}{(4a^2+5^2)(4a^2+7^2)} + \frac{4}{(4a^2+7^2)(4a^2+9^2)} + \cdots$

143) $\frac{1}{l\left(1+\frac{1}{1}\right)} + \frac{1}{l\left(2+\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{l\left(3+\frac{1}{3}\right)} + \frac{1}{l\left(4+\frac{1}{4}\right)} + \cdots$

144) $1 + \frac{1-x}{1+x}x + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 x^2 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 x^3 + \cdots$

145) $\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \frac{x^4}{1-x^4} + \frac{x^5}{1-x^5} + \cdots$

146) $\frac{1+x}{1-x}\cdot x + \frac{1+x^2}{1-x^2}x^4 + \frac{1+x^3}{1-x^3}x^9 + \frac{1+x^4}{1-x^4}x^{16} + \cdots$

147) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2^2}{(x+3)^3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3^3}{(x+4)^4} + \cdots$

148) $\frac{1}{x} - \frac{a}{x(x+1)} + \frac{a(a-1)}{x(x+1)(x+2)} - \frac{a(a-1)(a-2)}{x(+1)(x+2)(x+3)} +$

$+ \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} - \cdots$

149) $x(1-x) + \frac{1}{2}x^2(1-x^2) + \frac{1}{3}x^3(1-x^3) + \cdots$

150) $\frac{1}{2}x(1-x) + \frac{1.3}{2.4}x^2(1-x^2) + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3(1-x^3) + \cdots$

151) $\frac{1}{2x} - \frac{x}{1^2-x^2} - \frac{x}{2^2-x^2} - \frac{x}{3^2-x^2} - \frac{x}{4^2-x^2} - \cdots$

152) $\frac{1}{x^2+1} + \frac{a^2}{2!}\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) + \frac{a^4}{4!}\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right) -$

$- \frac{a^6}{6!}\left(x^4 - x^2 + \frac{1}{x^2+1}\right) + \cdots$

153) $1 + (m)_1 \frac{\alpha}{x}\left(1+\frac{\beta}{x}\right)^{m-1} + (m)_2 \frac{\alpha}{x}\left(\frac{\alpha}{x} - \frac{2\beta}{x}\right)\left(1+\frac{2\beta}{x}\right)^{m-2} +$

$+ (m)_3 \frac{\alpha}{x}\left(\frac{\alpha}{x} - \frac{3\beta}{x}\right)\left(1+\frac{3\beta}{x}\right)^{m-3} + \cdots$

$$154)\ \left(\frac{a^{\frac{\pi x}{2}} - a^{-\frac{\pi x}{2}}}{a^{\frac{\pi}{2}} + a^{-\frac{\pi}{2}}}\right) - \left(\frac{a^{\frac{3\pi x}{2}} - a^{-\frac{3\pi x}{2}}}{a^{\frac{3\pi}{2}} + a^{-\frac{3\pi}{2}}}\right) + \left(\frac{a^{\frac{5\pi x}{2}} - a^{-\frac{5\pi x}{2}}}{a^{\frac{5\pi}{2}} + a^{-\frac{5\pi}{2}}}\right) - \left(\frac{a^{\frac{7\pi x}{2}} - a^{-\frac{7\pi x}{2}}}{a^{\frac{7\pi}{2}} + a^{-\frac{7\pi}{2}}}\right) + \cdots$$

$$155)\ \frac{xe^{xe^x}}{1} + \frac{x^2 e^{2xe^x}}{2!} + \frac{x^3 e^{3xe^x}}{3!} + \frac{x^4 e^{4xe^x}}{4!} + \cdots\cdots$$

$$156)\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) - \cdots\cdots$$

$$157)\ \frac{l(+x)}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{l\,(1+x)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\,\frac{l\,(1+x)^3}{1.2.3} + \frac{1}{4}\,\frac{l\,(1+x)^4}{1.2.3.4} + \cdots\cdots$$

$$158)\ (m)_0 + \frac{(m)_1}{1-x} + \frac{(m)_2}{1-2x} + \frac{(m)_3}{1-3x} + \frac{(m)_4}{1-4x} + \cdots\cdots$$

$$159)\ \frac{x}{x+1} + \frac{1}{2}\,\frac{x}{x+2} + \frac{1}{3}\,\frac{x}{x+3} + \frac{1}{4}\,\frac{x}{x+4} + \cdots\cdots$$

$$160)\ 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{x^3}\right)^2 + \cdots$$

$$161)\ \frac{1}{a^{x\sqrt{\log 2}}} + \frac{1}{a^{x\sqrt{\log 2}}} + \frac{1}{a^{x\sqrt{\log 3}}} + \frac{1}{a^{x\sqrt{\log 4}}} + \cdots\cdots$$

$$162)\ \frac{\sin x}{1^x} + \frac{\sin\frac{x}{2}}{2^x} + \frac{\sin\frac{x}{3}}{3^x} + \frac{\sin\frac{x}{4}}{4^x} + \cdots\cdots$$

$$163)\ 1 - \frac{x^2}{1!\,1!} + \frac{x^4}{2!\,2!} + \frac{x^6}{3!\,3!} + \frac{x^8}{4!\,4!} - \cdots\cdots$$

$$164)\ \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{1!\,2!} + \frac{x^5}{2!\,3!} - \frac{x^7}{3!\,4!} + \frac{x^9}{4!\,5!} - \cdots\cdots$$

$$165)\ \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{1!\,3!} + \frac{x^6}{2!\,4!} - \frac{x^8}{3!\,5!} + \frac{x^{10}}{4!\,6!} - \cdots\cdots$$

$$166)\ 1 + \frac{1}{2^2}x^2 + \frac{1\,.1}{2^2.4^2}x^4 + \frac{1\,.1\,.3^2}{2^2.4^2.6^2}x^6 + \frac{1\,.1\,.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}x^8 + \cdots$$

$$167)\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{4}x^3 + \frac{1\,.1}{2^2.4^2}\cdot\frac{3}{6}x^5 + \frac{1\,.1\,.3^2}{2^2.4^2.6^2}\cdot\frac{5}{8}x^7 + \cdots\cdots$$

$$168)\ \frac{3^3-3}{4}\cdot\frac{x^3}{3!} - \frac{3^5-3}{4}\cdot\frac{x^5}{5!} + \frac{3^7-3}{4}\cdot\frac{x^7}{7!} - \frac{3^9-3}{4}\cdot\frac{x^9}{9!} + \cdots\cdots$$

169) $1 + \frac{4.2}{3.5}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)x^2 + \frac{4.6}{5.7}\cdot\frac{2}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)x^4 +$
$+\frac{4.6.8}{5.7.9}\cdot\frac{2}{5}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\right)x^6+\cdots$

170) $1 + (m-1)_1\, x + (m-2)_2\, x^2 + (m-3)_3\, x^3 + \cdots$

171) $\frac{a^2(b-1)}{1!\,2!}x^2 + \frac{a^3(b^2-1)}{2!\,3!}x^3 + \frac{a^4(b^3-1)}{3!\,4!}x^4 + \cdots$

172) $1 + m\frac{(m+\beta)}{1}x + \frac{m(m+\alpha+\beta)(m+2\beta)}{1.2}x^2 +$
$+\frac{m(m+2\alpha+\beta)(m+\alpha+2\beta)}{1.2.3}x^3 +$
$+\frac{m(m+3\alpha+\beta)(m+2\alpha+2\beta)(m+\alpha+3\beta)}{1.2.3.4}x^4+\cdots$

173) $(a+b)(c+e)x^\alpha + (2a+b)(2c+e)x^{\alpha+\beta} +$
$+(3a+b)(3c+e)x^{\alpha+2\beta} + (4a+b)(4c+e)x^{\alpha+3\beta}+\cdots$

174) $1 - h\cdot\frac{a}{x} + \frac{h^2}{1.2}\cdot\frac{a(a+1}{x^2} - \frac{h^3}{1.2.3}\cdot\frac{a(a+1)(a+2)}{x^3} +$
$+\frac{h^4}{1.2.3.4}\cdot\frac{a(a+1)(a+2)(a+3)}{x^4} - \cdots$

175) $x^a - \frac{a(a+1)}{2.b}x^{a-1} + \frac{a(a^2-1)(a+2)}{2.2^2.b^2}x^{a-2} -$
$-\frac{a(a^2-1)(a^2-4)(a+3)}{2.3.2^3.b^3}x^{a-3}+$
$+\frac{a(a^2-1)(a^2-4)(a^2-9)(a+4)}{2.3.4.2^4.b^4}x^{a-4} - \cdots$

176) $1 - \frac{1^2.2^2}{4.8}\left(\frac{1}{4x}\right)^2 + \frac{1^2.3^2.\,5^2.\,7^2}{4.8.12.16}\left(\frac{1}{4x}\right)^4 -$
$-\frac{1^2.3^2.\,5^2.\,7^2.\,9^2.11^2}{4.8.12.16.20.24}\left(\frac{1}{4x}\right)^6+\cdots$

177) $\frac{x}{1+x} + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{x}{1+x}\right)^4+\cdots$

178) $1 + \frac{m.m}{2.4}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{(m+2)m.m(m-2)}{2.4.6.8}\left(x-\frac{1}{x}\right)^4 +$
$+\frac{(m+4)(m+2)m.m(m-2)(m-4)}{2.4.6.8.10.12}\left(x-\frac{1}{x}\right)^6+\cdots$

179) $x\sin\varphi + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{2}x^2\sin 2\varphi + \frac{1}{2.3}\cdot\frac{1}{3}x^3\sin\varphi+\cdots$

180) $\frac{1}{2x} + \frac{x\cos\varphi}{1^2-x^2} - \frac{x\cos 2\varphi}{2^2-x^2} + \frac{x\cos 3\varphi}{3^2-x^2} - \frac{x\cos 4\varphi}{4^2-x^2}+\cdots$

181) $\frac{1}{2x} - \frac{x\cos\varphi}{1^2+x^2} + \frac{x\cos 2\varphi}{2^2+x^2} - \frac{x\cos 3\varphi}{3^2+x^2} + \frac{x\cos 4\varphi}{4^2+x^2} - \cdots\cdots$

182) $\frac{1}{\pi^2+h^2}\cos\frac{\pi x}{h} - \frac{1}{(2\pi)^2+h^2}\cos\frac{2\pi x}{h} + \frac{1}{(3\pi)^2+h^2}\cos\frac{3\pi x}{h} - \cdots$

183) $\frac{1}{2} + e^{-\left(\frac{1}{2a}\right)^2}\cos x + e^{-\left(\frac{2}{2a}\right)^2}\cos 2x +$

$+ e^{-\left(\frac{3}{2a}\right)^2}\cos 3x + e^{-\left(\frac{4}{2a}\right)^2}\cos 4x + \cdots$

184) $1 + 2e^{-a}\cos 2x + 2e^{-4a}\cos 4x + 2e^{-9a}\cos 6x + \cdots$

185) $1 - \frac{1}{2}\,\frac{x^2\cos 2\varphi}{2!} + \frac{1}{3}\,\frac{x^4\cos 4\varphi}{4!} - \frac{1}{4}\,\frac{x^6\cos 6\varphi}{6!} + \cdots$

186) $1 - \frac{1}{2}\,\frac{x^2\sin 2\varphi}{2!} + \frac{1}{3}\,\frac{x^4\sin 4\varphi}{4!} - \frac{1}{4}\,\frac{x^6\sin 6\varphi}{6!} + \cdots$

187) $\frac{\cos a\varphi}{x^a} + \frac{\cos(a+b)\varphi}{x^{a+b}} + \frac{\cos(a+2b)\varphi}{x^{a+2b}} + \frac{\cos(a+3b)\varphi}{x^{a+3b}} + \cdots$

188) $\frac{x\cos x}{1} + 1^1.\frac{x^2\sin 2x}{2} - 2^2.\frac{x^3\cos 3x}{1.2.3} - 3^3.\frac{x^4\sin 4x}{1.2.3.4} + \cdots$

189) $1 - \frac{x\sin x}{1} - 1^1.\frac{x^2\cos 2x}{1.2} + 2^2.\frac{x^3\sin 3x}{1.2.3} +$

$+ 3^3.\frac{x^4\cos 4x}{1.2.3.4} - \cdots$

Man zeige, dass bei folgenden Reihen die Summe einer geraden Anzahl von Gliedern sich einer andern Grenze nähere, als die Summe einer ungeraden Anzahl von Gliedern und bestimme den Unterschied dieser Grenzen.

190) $1 - \frac{1.6}{2.5} + \frac{1.6}{2.5}.\frac{2.7}{3.6} - \frac{1.6}{2.5}.\frac{2.7}{3.6}.\frac{3.8}{4.7} + \cdots$

191) $1 - \frac{2.5}{3.4} + \frac{2.5}{3.4}.\frac{3.6}{4.5} - \frac{2.5}{3.4}.\frac{3.6}{4.5}.\frac{4.7}{5.6} + \cdots$

192) $1 - \frac{2.6}{3.5} + \frac{2.6}{3.5}.\frac{3.7}{4.6} - \frac{2.6}{3.5}.\frac{3.7}{4.6}.\frac{4.8}{5.7} + \cdots$

193) $(1+1) + \left(\frac{1}{2} - 1\right) + \left(\frac{1}{2^2} + 1\right) + \left(\frac{1}{2^3} - 1\right)$

194) $1 - \frac{a+2}{b+2}.\frac{b+3}{a+3} + \frac{a+2}{b+2}.\frac{b+4}{a+4} - \frac{a+2}{b+2}.\frac{b+5}{a+5} + \cdots$

195) $1 - \frac{a+2}{a+4} + \frac{a+4}{a+6} - \frac{a+6}{a+8} + \frac{a+8}{a+10} - \cdots$

196) $a^2 - a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{5}{4}} + a^{\frac{6}{5}} - \cdots\cdots \qquad \left(a > \frac{1}{4}\right)$

197) $l\left(\frac{4}{1}\right) - l\left(\frac{6}{2}\right) + l\left(\frac{8}{3}\right) - l\left(\frac{10}{4}\right) + l\left(\frac{12}{5}\right) - \cdots\cdots$

198) $l(1) - l\left(\frac{a+1}{b+1}\right) + l\left(\frac{2a+1}{2b+1}\right) - l\left(\frac{3a+1}{3b+1}\right) +$

$+ l\left(\frac{4a+1}{4b+1}\right) - \cdots\cdots$

199) $\sin 2 - \sin\frac{3}{2} + \sin\frac{4}{3} - \sin\frac{5}{4} + \sin\frac{6}{5} - \cdots\cdots$

200) $1 - \sin\left(\frac{\pi+2}{\pi+3}\right) + \sin\left(\frac{\pi+4}{\pi+5}\right) - \sin\left(\frac{\pi+6}{\pi+7}\right) +$

$+ \sin\left(\frac{\pi+8}{\pi+9}\right) - \cdots\cdots$

201) $\operatorname{arctang}\frac{1}{2} - \operatorname{arctang}\frac{2}{3} + \operatorname{arctang}\frac{3}{4} - \operatorname{arctang}\frac{4}{5} + \cdots\cdots$

Sei

$$A = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

$$B = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

so wird

$$A - B = 2\left\{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots\right\} = A\sqrt{2}$$

also

$$A = -\frac{B}{\sqrt{2}-1}$$

Nun ist $A = \infty$, d. h. divergent, B dagegen endlich, weil convergent, also wäre das Unendliche gleich dem Endlichen. Wo liegt der Fehler?

Vergl. Messenger, of Mathem. II. Ser. I. p. 97—101.

202) Die Reihen:

a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots\cdots$

b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{8} -$

$- \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots\cdots$

entstehen aus der convergenten Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots\cdots$$

durch eine andere Anordnung der Glieder; es frägt sich nun, ob die abgeleiteten Reihen ebenfalls convergieren, und wenn dies der Fall ist, ob sie dieselbe Summe wie die ursprüngliche Reihe besitzen.

Vergl. Stern, Algebr. Analys. p. 333. Schlömilch, Uebungsbuch, II. Th. p. 172. Lejeune Dirichlet, Abh. d. Berlin. Akademie 1837, p. 48.

203) Von der convergenten Reihe:

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{2r-1}}-\frac{1}{\sqrt{2r}}+\cdots\cdots$$

unterscheidet sich die Reihe

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots\cdot$$

blos durch eine andere Aufeinanderfolge der Glieder; ist letztere ebenfalls convergent?

204) Sind die Reihen

$$1)\ \log\sqrt{2}+\log\sqrt[4]{4}-\log\sqrt[3]{3}+\log\sqrt[6]{6}+\log\sqrt[8]{8}-$$
$$-\log\sqrt[5]{5}+\cdots\cdot$$

$$2)\ \log\sqrt{2}+\log\sqrt[4]{4}-\log\sqrt[3]{3}-\log\sqrt[5]{5}+\log\sqrt[6]{6}+$$
$$+\log\sqrt[8]{8}-\log\sqrt[7]{7}-\log\sqrt[9]{9}+\cdots\cdot$$

$$3)\ \log\sqrt{2}+\log\sqrt[4]{4}+\log\sqrt[6]{6}-\log\sqrt[3]{3}-\log\sqrt[5]{5}-$$
$$-\log\sqrt[7]{7}+\cdots\cdot$$

$$4)\ \log\sqrt{2}+\log\sqrt[4]{4}+\log\sqrt[6]{6}-\log\sqrt[3]{3}-\log\sqrt[5]{5}+$$
$$+\log\sqrt[8]{8}+\log\sqrt[10]{10}+\log\sqrt[12]{12}-\log\sqrt[7]{7}-\log\sqrt[9]{9}+\cdots\cdot$$

welche sämmtlich aus der convergenten Reihe

$$\log\sqrt{2}-\log\sqrt[3]{3}+\log\sqrt[4]{4}-\log\sqrt[5]{5}+\cdots\cdots$$

durch Aenderung der Gliederfolge hervorgehen, convergent oder divergent, und besitzen sie im ersteren Falle dieselbe Summe wie die letztangegebene Reihe oder nicht?

205) Folgende Reihen

1) $\sin 1 + \sin\frac{1}{3} - \sin\frac{1}{2} + \sin\frac{1}{5} + \sin\frac{1}{7} - \sin\frac{1}{4} + \cdots\cdots$

2) $\sin 1 - \sin\frac{1}{2} - \sin\frac{1}{4} + \sin\frac{1}{3} - \sin\frac{1}{6} - \sin\frac{1}{8} +$
$+ \sin\frac{1}{5} - \cdots\cdots$

3) $\sin 1 + \sin\frac{1}{3} + \sin\frac{1}{5} - \sin\frac{1}{2} - \sin\frac{1}{4} + \sin\frac{1}{7} +$
$+ \sin\frac{1}{9} + \sin\frac{1}{11} - \cdots\cdots$

unterscheiden sich von einander und von der convergenten Reihe

$$\sin 1 - \sin\frac{1}{2} + \sin\frac{1}{3} - \sin\frac{1}{4} + \cdots\cdot$$

ebenfalls nur durch die Ordnung, in welcher die Glieder aufeinander folgen, und es ist wieder zu untersuchen, ob obige 3 Reihen ebenfalls und zwar gegen dieselbe Summe hin convergieren.

Folgende Sätze sind zu beweisen:

206) Wenn die Reihe

1) $\frac{u_1}{u_0} + \frac{u_2}{u_0 + u_1} + \frac{u_3}{u_0 + u_1 + u_2} + \frac{u_4}{u_0 + u_1 + u_2 + u_3}$

convergiert, so convergiert auch die Reihe

2) $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots;$

dagegen ist die Reihe 2) divergent, wenn dasselbe mit der Reihe

$$\frac{u_1}{u_0 + u_1} + \frac{u_2}{u_0 + u_1 + u_2} + \frac{u_3}{u_0 + u_1 + u_2 + u_3} + \cdots$$

der Fall ist.

Vergl. Grunerts Archiv B. 10 (Schlömilch).

207) Die nur positive Glieder enthaltende Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots\cdots$$

ist mit $r_1 u_1 + r_2 u_2 + r_3 u_3 + r_4 u_4 + \cdots\cdots$ gleichzeitig convergent oder divergent, wenn r_n eine Function des Stellenzeigers n ist, welche stets positiv und endlich bleibt.

Vergl. Crelle, Journal, Bd. 13. p. 171.

208) Die beiden nur positive Glieder enthaltenden Reihen

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots\cdots \qquad \text{und}$$

$$u_1 + k\,u_k + k^2 u_{k^2} + k^3 u_{k^3} + \cdots\cdots$$

sind gleichzeitig convergent oder divergent.

209) Um die nur positive Glieder enthaltende Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots$$

bezüglich ihrer Convergenz oder Divergenz zu prüfen, berechne man der Reihe nach folgende Grenzwerthe:

$$A_1 = lim \left(\frac{l\left(\frac{1}{u_n}\right)}{n}\right)$$

$$A_2 = lim \left(\frac{l\left(\frac{1}{n\,u_n}\right)}{l\,n}\right)$$

$$A_3 = lim \left(\frac{l\left(\frac{1}{n\,l\,n\,u_n}\right)}{l_2\,n}\right)$$

$$A_4 = lim \left(\frac{l\left(\frac{1}{n\,l\,n\,l_2\,n\,u_n}\right)}{l_3\,n}\right) \quad \text{u. s. w.}$$

Die Reihe convergiert oder divergiert dann, wenn die erste der Grössen A_1, A_2, A_3, A_4 etc., welche nicht Null ist, positiv oder negativ ist.

Vergl. Crelle, Journal, Bd. 12.

210) Die unendliche, nur positive Glieder enthaltende Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots$$

divergiert, wenn der Ausdruck

$$lim\; n\,u_n$$

nicht Null ist, und convergiert, wenn

$$lim\; n^h u_n$$

endlich bleibt, für Werthe von h grösser als + 1.

211) Wenn mit Bezug auf No. 210 $lim\, n\,u_n = 0$ und $lim\, n^h u_n = \infty$ ist, so convergiert die Reihe, wenn der Ausdruck

$$lim\; n\,(l\,n)^h\,u_n$$

endlich ist, und divergiert, wenn

$$lim\; n\,l\,n\,u_n$$

nicht Null ist. — Und allgemein

Wenn die Ausdrücke

$$\lim n^h u_n$$
$$\lim n(ln)^h u_n$$
$$\lim n\, l n\, (l_2 n)^h u_n$$
$$\vdots$$
$$\lim n\, l n\, l_2 n\, l_3 n \cdots\cdots (l_{r-1} n)^h u_n$$
$$l_2 n = l(ln),\ l_3 n = l(l(ln))\ \text{etc.}$$

sämmtlich unendlich gross, dagegen die Ausdrücke

$$\lim n u_n$$
$$\lim n\, l n\, u_n$$
$$\lim n\, l n\, l_2 n\, u_n$$
$$\vdots$$
$$\lim n\, l n\, l_2 n\, l_3 n \cdots\cdots l_{r-1} n\, u_n$$

sämmtlich der Null gleich sind; so convergiert die Reihe, wenn

$$\lim n\, l n\, l_2 n\, l_3 n \cdots\cdots (l_r n)^h u_n$$

nicht unendlich gross, und divergiert, wenn

$$\lim n\, l n\, l_2 n\, l_3 n \cdots\cdots (l_r n)\, u_n$$

nicht Null ist.

212) Wenn mit Bezug auf No. 132 $\lim n\alpha = 1$ und sich das Product $n\alpha$ der Grenze 1 durch Abnahme nähert, so stelle man den Quotienten $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ unter der Form dar:

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\log(n+1)}{\log n}\cdot\frac{\log_2(n+1)}{\log_2 n}\cdots\cdots\frac{\log_{r-1}(n+1)}{\log_{r-1} n}(1+\alpha_r)}$$

(wobei r auch gleich der Einheit sein kann). Für $r=1$, ist $\frac{\log_{r-1}(n+1)}{\log_{r-1} n} = \frac{\log_0 (n+1)}{\log_0 n} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$; der Ausdruck reduziert sich daher auf $\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\alpha_1\right)}$; die Reihe wird dann convergieren oder divergieren, je nachdem der Ausdruck

$$\lim \frac{\log_r n}{\log_r (n+1) - \log_r n} \cdot \alpha_r$$

mehr oder weniger als die Einheit beträgt.

213) Unter der in der vorigen Nummer gemachten Voraussetzung bringe man ferner den Quotienten $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ auf die Form

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\,l\,n} + \cdots\cdots + \frac{1}{n\,l\,n\,.\,l_2 n \ldots\ldots l_{r-1} n} + \alpha_r}$$

Die zu untersuchende Reihe convergiert oder divergiert dann, je nachdem der Ausdruck

$$\lim n\,l\,n\,l_2 n \cdots\cdots l_r n \cdot \alpha_r$$

mehr oder weniger als die Einheit beträgt.

VII. Ueber Doppelreihen.

Man entscheide über die Convergenz oder Divergenz folgender Doppelreihen:

$$1)\ \begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots \\ \frac{2}{6} + \frac{2}{18} + \frac{2}{54} + \frac{2}{162} + \frac{2}{486} + \cdots \\ \frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \frac{3}{256} + \frac{3}{1024} + \frac{3}{4096} + \cdots \\ \frac{4}{40} + \frac{4}{200} + \frac{4}{1000} + \frac{4}{5000} + \frac{4}{25000} + \cdots \\ \frac{5}{96} + \frac{5}{576} + \frac{5}{3456} + \frac{5}{20736} + \frac{5}{124416} + \cdots \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{array}$$

Die Summen der convergierenden Horizontalreihen, deren Glieder durchgehends dasselbe Vorzeichen besitzen, bilden selbst eine convergente Reihe, die Doppelreihe ist demnach convergent, ihre Summe ist 2.

$$
\begin{array}{l}
2)\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots \\
\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\cdots \\
\quad \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\frac{1}{1024}+\cdots \ \text{(div.)} \\
\quad \frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\frac{1}{625}+\frac{1}{3125}+\cdots \\
\quad \frac{1}{6}+\frac{1}{36}+\frac{1}{216}+\frac{1}{1296}+\frac{1}{7776}+\cdots \\
\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
3)\ \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\cdots \\
\quad \frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+\frac{1}{9.11}+\cdots \\
\quad \frac{1}{1.5}+\frac{1}{5.9}+\frac{1}{9.13}+\frac{1}{13.17}+\frac{1}{17.21}+\cdots \ \text{(con.)} \\
\quad \frac{1}{1.9}+\frac{1}{9.17}+\frac{1}{17.25}+\frac{1}{25.33}+\frac{1}{33.41}+\cdots \\
\quad \frac{1}{1.17}+\frac{1}{17.33}+\frac{1}{33.49}+\frac{1}{49.65}+\frac{1}{65.81}+\cdots \\
\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
4)\ \quad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots \\
\quad -\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\frac{1}{14}-\frac{1}{18}+\cdots \\
\quad +\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{15}-\frac{1}{21}+\frac{1}{27}-\cdots \qquad \text{(con.)} \\
\quad -\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{2}{20}+\frac{1}{28}-\frac{1}{36}+\cdots \\
\quad +\frac{1}{5}-\frac{1}{15}+\frac{1}{25}-\frac{1}{35}+\frac{1}{45}-\cdots \\
\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
5)\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)_1+\left(\frac{1}{2}\right)_2-\left(\frac{1}{2}\right)_3+\left(\frac{1}{2}\right)_4-\cdots \\
\quad 1-\left(\frac{1}{3}\right)_1+\left(\frac{1}{3}\right)_2-\left(\frac{1}{3}\right)_3+\left(\frac{1}{3}\right)_4-\cdots \\
\quad 1-\left(\frac{1}{4}\right)_1+\left(\frac{1}{4}\right)_2-\left(\frac{1}{4}\right)_3+\left(\frac{1}{4}\right)_4-\cdots \quad \text{(div.)}
\end{array}
$$

$$1-\left(\frac{1}{5}\right)_1+\left(\frac{1}{5}\right)_2-\left(\frac{1}{5}\right)_3+\left(\frac{1}{5}\right)_4-\cdots$$

$$1-\left(\frac{1}{6}\right)_1+\left(\frac{1}{6}\right)_2-\left(\frac{1}{6}\right)_3+\left(\frac{1}{6}\right)_4-\cdots$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

6) $l\,2 \quad + l\left(\frac{2}{3}\right) + l\left(\frac{3}{2}\right) + l\left(\frac{3}{4}\right) + l\left(\frac{4}{3}\right) + \cdots$

$$l(\sqrt{2})+l\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+l\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)+l\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)+l\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)+\cdots$$

$$l(\sqrt[4]{2})+l\left(\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\right)+l\left(\sqrt[4]{\frac{3}{2}}\right)+l\left(\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right)+l\left(\sqrt[4]{\frac{4}{3}}\right)+\cdots$$

$$l(\sqrt[8]{2})+l\left(\sqrt[8]{\frac{2}{3}}\right)+l\left(\sqrt[8]{\frac{3}{2}}\right)+l\left(\sqrt[8]{\frac{3}{4}}\right)+l\left(\sqrt[8]{\frac{4}{3}}\right)+\cdots$$

$$l(\sqrt[16]{2})+l\left(\sqrt[16]{\frac{2}{3}}\right)+l\left(\sqrt[16]{\frac{3}{2}}\right)+l\left(\sqrt[16]{\frac{3}{4}}\right)+l\left(\sqrt[16]{\frac{4}{3}}\right)+\cdots$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \text{(con.)} \quad \vdots \quad \vdots$$

7)

$$a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + \cdots$$

$$- a^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{6}{2}} - a^{\frac{9}{2}} - a^{\frac{12}{2}} - a^{\frac{15}{2}} - \cdots$$

$$+ a^{\frac{4}{3}} + a^{\frac{8}{3}} + a^{\frac{12}{3}} + a^{\frac{16}{3}} + a^{\frac{20}{3}} + \cdots \qquad \text{(div.)}$$

$$- a^{\frac{5}{4}} - a^{\frac{10}{4}} - a^{\frac{15}{4}} - a^{\frac{20}{4}} - a^{\frac{25}{4}} - \cdots$$

$$+ a^{\frac{6}{5}} + a^{\frac{12}{5}} + a^{\frac{18}{5}} + a^{\frac{24}{5}} + a^{\frac{30}{5}} + \cdots$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

8) $\text{arctang}\,\frac{1}{3} + \text{arctang}\,\frac{1}{7} + \text{arctang}\,\frac{1}{13} + \text{arctang}\,\frac{1}{21} + \cdots$

$$\text{arctang}\,\frac{1}{7} + \text{arctang}\,\frac{1}{13} + \text{arctang}\,\frac{1}{21} + \text{arctang}\,\frac{1}{31} + \cdots$$

$$\text{arctang}\,\frac{1}{13} + \text{arctang}\,\frac{1}{21} + \text{arctang}\,\frac{1}{31} + \text{arctang}\,\frac{1}{43} + \cdots$$

$$\text{arctang}\,\frac{1}{21} + \text{arctang}\,\frac{1}{31} + \text{arctang}\,\frac{1}{43} + \text{arctang}\,\frac{1}{57} + \cdots$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\operatorname{arctang}\frac{1}{31} & + & \operatorname{arctang}\frac{1}{43} & + & \operatorname{arctang}\frac{1}{57} & + & \operatorname{arctang}\frac{1}{73} + \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

(div.)

9) $$\begin{array}{l}
\cos 1 - \frac{1}{3}\cos\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cos\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\cos\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cos\frac{1}{5} - \cdots \\
\cos^2 1 - \frac{1}{3}\cos^2\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cos^2\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\cos^2\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cos^2\frac{1}{5} - \cdots \\
\cos^3 1 - \frac{1}{3}\cos^3\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cos^3\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\cos^3\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cos^3\frac{1}{5} - \cdots \\
\cos^4 1 - \frac{1}{3}\cos^4\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cos^4\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\cos^4\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cos^4\frac{1}{5} - \cdots \\
\cos^5 1 - \frac{1}{3}\cos^5\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cos^5\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\cos^5\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cos^5\frac{1}{5} - \cdots \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{array}$$

(div.)

10) $$\begin{array}{lllll}
1 + & x + & x^2 + & x^3 + & x^4 + \cdots \\
x + & 2x^2 + & 4x^4 + & 8x^6 + & 16x^8 + \cdots \\
x^2 + & 3x^3 + & 9x^6 + & 27x^9 + & 81x^{12} + \cdots \\
x^3 + & 4x^4 + & 16x^8 + & 64x^{12} + & 256x^{16} + \cdots \\
x^4 + & 5x^5 + & 25x^{10} + & 125x^{15} + & 625x^{20} + \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

$$\left(\text{con. für } -\sqrt{\tfrac{1}{2}} < x < +\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)$$

11) $$\begin{array}{lllll}
1 - & x + & x^2 - & x^3 + & x^4 - \cdots \\
1 - & (2)_1 x + & (3)_2 x^2 - & (4)_3 x^3 + & (5)_4 x^4 - \cdots \\
1 - & (3)_1 x + & (4)_2 x^2 - & (5)_3 x^3 + & (6)_4 x^4 - \cdots \quad \text{(div.)} \\
1 - & (4)_1 x + & (5)_2 x^2 - & (6)_3 x^3 + & (7)_4 x^4 - \cdots \\
1 - & (5)_1 x + & (6)_2 x^2 - & (7)_3 x^3 + & (8)_4 x^4 - \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

12) $$\begin{array}{l}
1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots \\
\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{2} - \cdots \\
\frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{3} + \frac{x^6}{3} - \cdots
\end{array}$$

$$\frac{x^3}{4} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{4} - \frac{x^6}{4} + \frac{x^7}{4} - \cdots$$
$$\frac{x^4}{5} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{5} - \frac{x^7}{5} + \frac{x^8}{5} - \cdots$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

(con. für $-1 < x < +1$)

13) $$\begin{array}{l} a + a\,x + a\,x^2 + a\,x^3 + a\,x^4 + \cdots \\ a^2 + a^2 x + a^2 x^2 + a^2 x^3 + a^2 x^4 + \cdots \\ a^3 + a^3 x + a^3 x^2 + a^3 x^3 + a^3 x^4 + \cdots \\ a^4 + a^4 x + a^4 x^2 + a^4 x^3 + a^4 x^4 + \cdots \\ a^5 + a^5 x + a^5 x^2 + a^5 x^3 + a^5 x^4 + \cdots \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{array}$$

$$\left\{\text{con. wenn} \begin{array}{l} -1 < x < +1 \\ -1 < a < +1 \end{array}\right\}$$

14) Aus der convergenten Doppelreihe

$$\begin{array}{l} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{12} - \cdots \\ +\frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{12} - \frac{1}{16} + \frac{1}{20} - \frac{1}{24} + \cdots \\ -\frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{24} + \frac{1}{32} - \frac{1}{40} + \frac{1}{48} - \cdots \\ +\frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{48} - \frac{1}{64} + \frac{1}{80} - \frac{1}{96} + \cdots \\ -\frac{1}{34} + \frac{1}{64} - \frac{1}{96} + \frac{1}{128} - \frac{1}{160} + \frac{1}{292} - \cdots \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{array}$$

lassen sich folgende Reihen durch eine andere Anordnung der Glieder ableiten:

a) $$\begin{array}{l} 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \frac{1}{8} - \cdots \\ +\frac{1}{4} + \frac{1}{12} - \frac{1}{8} + \frac{1}{20} + \frac{1}{28} - \frac{1}{16} + \cdots \end{array}$$

$$-\frac{1}{8}-\frac{1}{24}+\frac{1}{16}-\frac{1}{40}-\frac{1}{56}+\frac{1}{32}-\cdots$$
$$+\frac{1}{16}+\frac{1}{48}-\frac{1}{32}+\frac{1}{80}+\frac{1}{112}-\frac{1}{64}+\cdots$$
$$-\frac{1}{32}-\frac{1}{96}+\frac{1}{64}-\frac{1}{160}-\frac{1}{224}+\frac{1}{128}-\cdots$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

b)
$$+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$
$$+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{12}-\frac{1}{16}+\frac{1}{20}-\frac{1}{24}+\cdots$$
$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\frac{1}{12}-\cdots$$
$$+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{48}-\frac{1}{64}+\frac{1}{80}-\frac{1}{96}+\cdots$$
$$+\frac{1}{64}-\frac{1}{128}+\frac{1}{192}-\frac{1}{256}+\frac{1}{320}-\frac{1}{384}+\cdots$$
$$-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{24}+\frac{1}{32}-\frac{1}{40}+\frac{1}{48}-\cdots$$
$$+\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

c)
$$+1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$$
$$+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{12}-\frac{1}{16}+\frac{1}{20}-\frac{1}{24}+\cdots$$
$$-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{10}-\frac{1}{14}+\frac{1}{8}-\cdots$$
$$+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{48}-\frac{1}{64}+\frac{1}{80}-\frac{1}{96}+\cdots$$
$$+\frac{1}{64}+\frac{1}{192}-\frac{1}{128}+\frac{1}{320}+\frac{1}{448}-\frac{1}{256}+\cdots$$
$$-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{24}+\frac{1}{32}-\frac{1}{40}+\frac{1}{48}+\cdots$$
$$+\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Es ist anzugeben, ob die Reihen *a*), *b*) und *c*) ebenfalls convergieren oder nicht, und ob sie im Falle der Convergenz dieselbe Summe besitzen wie die ursprüngliche Reihe.

VIII. Ueber Reihenentwicklungen.

A. Ueber recurrente Reihen.

Folgende Functionen sind in recurrierende Reihen zu verwandeln. Für jede dieser Reihen ist das allgemeine Glied in independenter Form darzustellen, die Summenformel zu bestimmen, und ferner sind die Grenzen für die Giltigkeit der Entwicklung anzugeben.

Vergl. Euler, Einleitung, 13. Cap.; Serret, Handbuch der höh. Alg, III. Cap.

1) $\frac{1 + x}{1 - x - x^2}$

2) $\frac{1 - x}{1 - x - x^2}$

3) $\frac{1 + 2x}{1 - x - x^2}$

4) $\frac{1 - x}{1 - x - 2x^2}$

5) $\frac{2x + 2}{x^2 + 4x - 1}$

6) $\frac{1 - x}{1 - 5x + 6x^2}$

7) $\frac{1}{(1 + x)(1 - x)^2}$

8) $\frac{1}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)}$

9) $\frac{p x \sin \varphi}{1 - 2p \cos \varphi \,.\, x + p^2 x^2}$

10) $\frac{1 - p x \cos \varphi}{1 - 2p \cos \varphi \,.\, x + p^2 x^2}$

11) $\frac{A + Bpx}{1 - 2p \cos \varphi \,.\, x + p^2 x^2}$

12) $\frac{1 + x + x^2}{(1 - x)^2 (1 - x)(1 + x^2)}$

13) $\frac{1 - 5x + 8x^2}{\sqrt{x} - 8x \sqrt{x} + 21x^2 \sqrt{x} - 18x^3 \sqrt{x}}$

14) $\dfrac{-1+3x}{1+3\sqrt{x}-4x}$

15) $\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{-6-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}$

Folgende recurrierende Reihen der zweiten Ordnung sind fortzusetzen, ohne vorher die Beziehungsscala zu entwickeln:

16) $1+3x+4x^2+7x^3+\cdots\cdots$

17) $1+2x^2+2x^3+\cdots\cdots$

18) $1+4x+14x^2+46x^3+\cdots\cdots$

19) $3-17x+87x^2-437x^3+\cdots\cdots$

20) $1-2x-\frac{1}{6}x^2-\frac{13}{36}x^3-\cdots\cdots$

21) $2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2+0\cdot x^3+\cdots\cdots$

In folgenden recurrierenden Reihen, welche von der dritten Ordnung sind, sollen 3 weitere Glieder ohne Zuhilfenahme der Beziehungsscala entwickelt werden:

22) $x^2+6x^3+36x^4+208x^5+\cdots\cdots$

23) $1+x+x^2+2x^3+2x^4+5x^5+\cdots\cdots$

24) $1+x+x^2+4x^3+31x^4+256x^5+\cdots\cdots$

25) $1+2x+3x^2+8x^3+13x^4+38x^5+\cdots\cdots$

26) $1+3x+8x^2+21x^3+55x^4+144x^5+\cdots\cdots$

27) $1+3x^2-x^3+9x^4-6x^5+\cdots\cdots$

28) $1+3x+9x^2+23x^3+57x^4+135x^5+\cdots\cdots$

29) $1-x+9x^2-5x^3+65x^4+3x^5+\cdots\cdots$

30) $1+2x+2x^2+x^3+0x^4+0x^5+\cdots\cdots$

31) Die Reihe

$$1-x+x^2-\frac{7}{6}x^3+\frac{37}{6}x^4-\frac{37}{3}x^5+\frac{160}{3}x^6-\frac{397}{3}x^7-\cdots$$

ist eine recurrierende der 4. Ordnung; man bestimme die 3 nächstfolgenden Glieder derselben.

32) Die wiederkehrende Reihe

$$1+2x^2-x^3+10x^4-2x^5+31x^6-10x^7+92x^8-31x^9+\cdots$$

welche eine fünfgliederige Beziehungsscala besitzt, soll fortgesetzt werden.

33) Das dritte Glied einer recurrenten Reihe $1 + \cdots$, deren Beziehungsscala der Coefficienten $-6, -5$ ist, ist $17x^2$; man berechne das nächstfolgende Glied.

34) Es sei $2, -1$ die Relationsscala für die Coefficienten einer recurrenten Reihe $1 + 2x + \cdots$ und $5x^4$ das 5. Glied derselben, wie lautet das 4. Glied der Reihe?

35) Das 5. Glied der wiederkehrenden Reihe $1 - 11x + \cdots$ von der Beziehungsscala der Coefficienten $1, -1$, ist $11x^4$; man berechne den Coefficienten des nächstfolgenden Gliedes und jenen von x^8.

36) Man finde für jede der Reihen Nr. 16 bis 30 die erzeugende Function.

37) Von einer recurrenten Reihe, deren Coefficienten die Relationsscala $-2, -1$ besitzen, sind die Glieder

$$9, -7x \text{ und } -31x^{14}, +33x^{15}$$

gegeben; man bestimme die Summe der ersten 16 Glieder und die gebrochene Function, aus deren Entwicklung die Reihe entsteht.

38) Von einer recurrenten Reihe, deren Coefficienten die Relationsscala $3, -3, 1$ besitzen, sind die Glieder

$$3, 6x, 11x^2 \text{ und } 531x^{22}, 578x^{23}, 627x^{24}$$

gegeben; man finde die Summe der unendlichen Reihe und die Summe der ersten n Glieder.

39) In einer recurrenten Reihe $1 + \cdots$ besitzen die Coefficienten die Relationsscala $1, -1$ und das dritte Glied ist $4x^2$; man finde hieraus die Summe der unendlichen Reihe.

Es ist zu untersuchen, ob folgende Reihen recurrente seien, und im bejahenden Falle die Summe einer jeden zu bestimmen:

40) $1 - 3x + 9x^2 - 27x^3 + 81x^4 - 243x^5 + \cdots\cdots$

41) $1 + 4x + 7x^2 + 10x^3 + 13x^4 + \cdots\cdots$

42) $1 + 7x + 18x^2 + 34x^3 + 55x^4 + 81x^5 + 112x^6 + \cdots\cdots$

43) $11 + 25x + 57x^2 + 113x^3 + 199x^4 + 321x^5 + 485x^6 + 697x^7 + \cdots\cdots$

44) $1 - 4x + 16x^2 - 64x^3 + x^4 - 4x^5 + 16x^6 - 64x^7 + 256x^8 - 1024x^9 + 4096x^{10} - \cdots\cdots$

45) $1 + 3x + 6x^2 + 12x^3 + 14x^4 + 84x^5 + 96x^6 + \cdots$

46) $x(1-x) + x^2(1-x^2) + x^3(1-x^3) + x^4(1-x^4) + \cdots$

47) $x(1-x) + 2x^2(1-x^2) + 3x^3(1-x^3) + 4x^4(1-x^4) + \cdots$

48) $ax(1-x) - (a+d)x^2(1-x^2) + (a+2d)x^3(1-x^3) -$
$- (a+3d)x^4(1-x^4) + \cdots$

49) Es sei $u_{n+2} = a u_{n+1} - b u_n$ die charakteristische Gleichung für eine recurrente Reihe; dann ist immer

$$\frac{u^2_{n+1} - a u_n u_{n+1} + b u^2_n}{b^n}$$

eine constante Grösse.

50) Es seien u_n, u_{n+1}, u_{n+2} drei auf einander folgende Glieder einer recurrenten Reihe, dann ist die Reihe

$$U_n = u_n u_{n+2} - u^2_{n+1}$$

ebenfalls eine recurrente.

51) Es seien u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3} Glieder einer recurrenten Reihe, dann ist die Reihe, deren allgemeines Glied

$$U_n = u_n u_{n+3} - u_{n+1} u_{n+2}$$

ist, gleichfalls eine recurrente.

B. Ueber die Binomial- und Exponential-Reihe *).

52) Es ist der Ausdruck $(a + x)^m$ in eine Reihe zu entwickeln, welche nach den steigenden Potenzen des Quotienten $\frac{x}{a+x}$ fortschreitet.

53) Die Function $\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ ist in eine Reihe zu entwickeln, welche nach den steigenden Potenzen des Bruches $\frac{x}{1+x}$ fortschreitet.

54) Der Ausdruck $\left(\frac{1+x}{2x}\right)^{-n}$ ist in eine Reihe zu verwandeln, welche nach den steigenden Potenzen des Quotienten $\frac{1-x}{1+x}$ fortschreitet.

55) Es ist der Ausdruck $\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^n$ in eine Reihe zu verwandeln,

*) Sämmtliche entwickelte Reihen sind bezüglich ihrer Convergenz zu untersuchen.

welche nach den steigenden Potenzen der Grösse $\frac{1}{2x+1}$ fortschreitet.

56) Man beweise, indem man die vorhergehenden Entwicklungen anwendet:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2.2} + \frac{1.3}{2.4.2^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.2^3} + \cdots$$

$$= \frac{7}{5}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1.3}{100.200} + \frac{1.3.5}{100.200.300} + \cdots\right)$$

$$\sqrt[3]{3} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{24} + \frac{1}{24}\cdot\frac{4}{48} - \frac{1}{24}\cdot\frac{4}{48}\cdot\frac{7}{72} + \cdots\right)$$

$$= \frac{13}{9}\left(1 - \frac{1.10}{3.2187} + \frac{1.4.10^2}{3.6.2186^2} - \frac{1.4.7.10^3}{3.6.9.2187^3} + \cdots\right)$$

$$\sqrt[3]{5} = \frac{5}{3}\left(1 + \frac{1}{81}\cdot 2 + \frac{1.4}{81.162}\cdot 4 + \frac{1.4.7}{81.162.243}\cdot 8 + \cdots\right)$$

$$\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}} = \frac{11}{3}\left(1 + \frac{5}{252} + \frac{5.15}{252.504} + \right.$$
$$\left. + \frac{5.15.25}{252.504.756} + \cdots\right)$$

$$\sqrt{8+\sqrt{15}} + \sqrt{8-\sqrt{15}} = 2\sqrt{7}\left\{1 + \frac{1}{2!}\frac{15}{195} - \frac{15}{4!}\left(\frac{15}{196}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1.15.63}{6!}\left(\frac{15}{196}\right)^3 - \frac{1.15.63.99}{8!}\left(\frac{15}{196}\right)^4 + \cdots\right\}$$

$$= \frac{11}{2}\left\{1 - \frac{1}{22} - \frac{1.3}{22.44} - \frac{1.3.5}{22.44.66} - \cdots\right\}$$

Wie viele Glieder hat man von jeder der vorstehenden Reihen beizubehalten, wenn das Resultat bis auf 10 Dezimalstellen genau gefunden werden soll?

57) Es ist der Ausdruck $(\sqrt{1+x^2}+1)^m$ in eine Potenzenreihe zu entwickeln.

58) Man verwandle die Function

$$f(x) = \left[\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{(1-\sqrt{1-x^2})^m} - \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{(1+\sqrt{1-x^2})^m}\right]\frac{x^{2m}}{2}$$

in eine nach den steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe

Vergl. Grunerts Archiv, 19. Bd.

59) Folgende Ausdrücke sind in Potenzenreihen zu entwickeln:

$$a)\ \frac{1 - 2x\cos\varphi + x^2\cos 2\varphi}{(1 - 2x\cos\varphi + x^2)^2}$$

$$b)\ \frac{2.(1 - x\cos\varphi)\sin\varphi}{(1 - 2x\cos\varphi + x^2)^2}$$

Anl. Man bilde

$$[a) + xi \cdot b)],\ \text{und}\ [a) - xi \cdot b)]$$

60) Die Reihe

$$[(1+x)^n - 1] + [(1+x^2)^n - 1] + [(1+x^3)^n - 1] + \\ + [(1+x^4)^n - 1] + \cdots$$

ist in eine Potenzenreihe umzuwandeln und zu zeigen, dass der Coefficient von x^m der Summe jener Binomialcoefficienten der n^{ten} Potenz gleich ist, deren Zeiger Theiler von m sind, wobei die Einheit mitzuzählen ist.

61) Man transformiere auch obige Reihe in eine Reihe von der Form

$$A_1 \frac{x}{1-x} + A_2 \frac{x^2}{1-x^2} + A_3 \frac{x^3}{1-x^3} + A_4 \frac{x^4}{1-x^4} + \cdots$$

62) Für folgende Functionen sind Reihen abzuleiten, welche nach den steigenden Potenzen der Variablen geordnet sind:

$$a)\ \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} + e^{-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}}{2}$$

$$b)\ \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} - e^{-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}}{2\sqrt{1+x^2}}$$

$$c)\ \frac{e^{\frac{1}{1+x}} - e^{\frac{1}{1-x}}}{2}$$

$$d)\ \frac{e^y - e^z}{2\sqrt{1+x^2}},\ y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}+x},\ z = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$$

63) Es sei

$$a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

eine unbedingt convergierende Reihe; man entwickle

$$e^{a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots}$$

in eine nach den steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe und bestimme den Coefficienten von x^n sowohl in independenter als auch in recurrierender Form.

Vergl. Stern, Alg. Anal., p. 387, Note VII. Ueber die Coefficienten vergl. Matthiessen, Grundzüge der antiken und modernen Algebra, p. 62.

64) Als specielle Fälle der vorhergehenden Aufgabe verwandle man folgende Functionen in Reihen:

a) $e^{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{4^4}{4} + \cdots}$

b) $e^{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots}$

c) $e^{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots}$

d) $e^{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots}$

e) $e^{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots}$

f) $e^{x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \cdots}$

g) $e^{(1+x)^n}$

h) e^{e^x}

Speciell zu *h*) und ähnlichen Entwicklungen vergleiche Herschel, Sammlung von Aufgaben aus der endlichen Differenzen- und Summenrechnung. D. v. Schnuse. Achter Abschnitt.

Aus der independenten Form des Coefficienten der n^{ten} Potenz von x in dem Beispiele *a*) leite man folgenden Satz der höheren Zahlentheorie ab:

„Das Product aller ganzen Zahlen, die kleiner als eine Primzahl sind, um eine Einheit vermehrt, ist theilbar durch diese Primzahl". (Wilson'scher Satz.)

Welche bemerkenswerthe combinatorische Formeln findet man ferner, wenn man in *a*) die Glieder der Reihe abwechselnd mit dem Zeichen + oder —, oder durchgehends negativ nennt? Vergl. Stern, Alg. An. Note VII.

C. Ueber logarithmische Reihen.

65) Aus der Formel

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots (-1 < x < +1)$$

ist für ly die Reihe

$$\frac{l(y-1)+l(y+1)}{2}+\left[\frac{1}{2y^2-1}+\frac{1}{3(2y^2-1)^3}+\frac{1}{5(2y^2-1)^5}+\cdots\right]$$

abzuleiten. Welchen Zahlwerth muss y wenigstens besitzen, wenn für eine Genauigkeit bis auf 10 Dezimalstellen von der eingeklammerten Reihe drei, beziehungsweise zwei Glieder oder blos ein einziges Glied hinreichen soll? Entwickele

$$\log\frac{1+x}{1-x}$$

und setze

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{y}{y-1}$$

66) Aus derselben Formel leite man

a) die von Borda aufgestellte Reihe:

$$l(y+2)=2l(y+1)+l(y-2)-2l(y-1)+$$
$$+2\left[\frac{2}{y^3-3y}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{y^3-3y}\right)^3+\cdots\right]$$

b) die von Haros gegebene Reihe

$$l(y+5)=l(y+4)+l(y+3)+l(y-4)+l(y-3)-$$
$$-l(y-5)-2\,l\,y-2\left[\frac{72}{y^4-25y^2+72}+\frac{1}{3}\left(\frac{72}{y^4-25y^2+72}\right)^3+\cdots\right]$$

ab. Mit Hilfe dieser beiden Reihen berechne man die Logarithmen der ersten zehn auf einander folgenden Primzahlen und gebe an, wie viele Glieder benützt werden müssen, um $l\,19$ auf 30 Dezimalen genau zu erhalten?

Ad *a*). Setze

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{(y-1)^2\,(y+2)}{(y+1)^2\,(y-2)}$$

oder

$$x=\frac{2}{x^3-3x}$$

Wie lautet die entsprechende Substitution bei *b*).

67) Es ist die Richtigkeit der folgenden Reihenentwicklungen nachzuweisen:

a) $l(x+10)=l(x+8)+l(x+4)-l(x-2)-$

$$-2\left[\frac{6}{x^2+12x+26}+\frac{1}{3}\left(\frac{6}{x^2+12x+26}\right)^3+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5}\left(\frac{6}{x^2+12x+26}\right)^5+\cdots\right]$$

$$b)\ l(x-10) = l(x-8) + l(x-2) - lx -$$
$$-2\left[\frac{8}{x^2-10x+8} + \frac{1}{3}\left(\frac{8}{x^2-10x+8}\right)^3 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5}\left(\frac{8}{x^2-10x+8}\right)^5 + \cdots\right]$$

68) Folgende Reihen, welche sämmtlich $l2$ als Summe besitzen, sind abzuleiten:

$$a)\ \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^4 + \cdots\right]$$
$$b)\ \frac{1}{3}\left[\frac{7}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{7}{8}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{7}{8}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{7}{8}\right)^4 + \cdots\right]$$
$$c)\ \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2.8^2} + \frac{1}{3.8^3} - \frac{1}{4.8^4} + \cdots\right) +$$
$$+ 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2.4^2} + \frac{1}{3\cdot 4^3} + \cdots\right)$$
$$d)\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{4.2^4} + \cdots$$

Ad *d*). Stern, Alg. Analys., p. 158.

Wenn mit Hilfe dieser Reihen $l2$ bis auf 4 Dezimalstellen genau berechnet werden sollte, wie viele Glieder würde man von jeder dieser Reihen beibehalten müssen?

69) Man beweise ferner, dass

$$l3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{4.2^4} + \cdots +$$
$$+ 2\left(1 + \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} + \frac{1}{7.5^7} + \cdots\right)$$
$$l5 = 1 + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.2^2} + \frac{1}{4.2^3} + \cdots +$$
$$+ 2\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{5.7^5} + \frac{1}{7.7^7} + \cdots\right) -$$
$$- 2\left(\frac{1}{31} + \frac{1}{3.31^3} + \frac{1}{5.31^5} + \frac{1}{7.31^7} + \cdots\right)$$
$$l10 = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{1}{3.9} + \frac{1}{5.9^2} + \frac{1}{7.9^3} + \cdots\right) +$$
$$+ \frac{4}{5}\left(1 + \frac{1}{3.25} + \frac{1}{5.25^2} + \frac{1}{7.25^3} + \cdots\right) +$$
$$+ \frac{2}{19}\left(1 + \frac{1}{3.361} + \frac{1}{5.361^2} + \frac{1}{7.361^3} + \cdots\right)$$

$$l10 = 2\left(1 + \frac{1}{3.9} + \frac{1}{5.9^2} + \frac{1}{7.9^3} + \cdots\right) +$$
$$+ \frac{1}{17}\left(1 + \frac{1}{3.289} + \frac{1}{5.289^2} + \frac{1}{7.289^3} + \cdots\right) +$$
$$+ \frac{2}{19}\left(1 + \frac{1}{3.361} + \frac{1}{5.361^2} + \frac{1}{7.361^3} + \cdots\right)$$

70) Folgende Reihen sind abzuleiten:

a)
$$\begin{aligned} l2 = &\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots \\ &+ \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^5} + \cdots \\ &+ \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{6^5} + \cdots \\ &+ \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^3} + \frac{1}{8^4} + \frac{1}{8^5} + \cdots \\ &\quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 1 - l2 = &\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \cdots \\ &+ \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^5} + \cdots \\ &+ \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^5} + \cdots \\ &+ \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{9^5} + \cdots \\ &\quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{aligned}$$

Ueber diese und ähnliche Reihen s. Stern, Alg. An., p. 433 bis 447.

71) Die Functionen

$$\frac{l(1+x)}{1-x} \text{ und } \frac{2+x}{x}\, l(1+x)$$

sind in Potenzreihen zu verwandeln.

72) Ferner sind die Ausdrücke:

a) $-x + l\left[(1+x)\sqrt{1+x^2}\right]$

b) $x - l\dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$

in Reihen zu verwandeln. Gelten diese Reihen auch noch für $x = 1$ und welche bemerkenswerthe Formeln findet man in diesem Falle?

73) Für folgende Ausdrücke sind Reihen zu entwickeln, welche nach den steigenden Potenzen von x fortschreiten:

$$a)\ l\left(\frac{1+x}{1-x+x^2}\right)$$

$$b)\ l\left[\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}\right]$$

$$c)\ l\left(\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}\right)$$

$$d)\ l\left(\frac{1-x+x^2-x^3+\ldots\ldots\ldots+x^{2n}}{1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots\ldots+x^{2n}}\right)$$

74) Die Function $l(1+x)$ ist in eine Reihe von der Form $A_1 x(1-x) + A_2 x^2 (1-x^2) + A_3 x^3 (1-x^3) + \cdots$ zu entwickeln.

75) Die Ausdrücke

$$\frac{l(1+x)}{1+x} \text{ und } \frac{1}{1+x}\, l\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

sind in Reihen zu verwandeln, welche nach den steigenden Potenzen von x geordnet sind. Für dieselben Ausdrücke entwickele man auch Reihen von der Form

$$b_1\left(\frac{x}{1+x}\right) + b_2\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + b_3\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + b_4\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 + \cdots$$

und drücke den Coefficienten b_{n+1} durch den Coefficienten der Potenzreihen aus. Welche bemerkenswerthe Relationen zwischen den Binomialcoefficienten der n^{ten} Potenz erhält man auf diese Weise?

Vergl. Grunerts Archiv, 2. Bd. und Schlömilch, Uebungsbuch I, p. 264.

76) Aus der Formel

$$\frac{1}{2}\, l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\cdots$$

$$-1 < x < +x$$

ist die Gleichung

$$\frac{l(y+\sqrt{1+y^2})}{\sqrt{1+y^2}} = y - \frac{2}{3}y^3 + \frac{2.4}{3.5}y^5 - \frac{2.4.6}{3.5.7}y^7 + \cdots\cdots$$

$$-1 < y < +1$$

abzuleiten.

Vergl. Schlömilch, Uebungsbuch I, p. 266.

77) Es ist die Gleichung

$$y^2 = 1 - 2x \cos \alpha + x^2$$

gegeben; man entwickle $\log y$ in eine Potenzenreihe von x; ferner verwandle man die Ausdrücke

$$\frac{1}{4} \log \frac{1 + 2x \sin \alpha + x^2}{1 - 2x \sin \alpha + x^2}$$

$$\frac{1}{4} \log \frac{1 + 2x \cos \alpha + x^2}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}$$

in Potenzenreihen. Welche bemerkenswerthe Formeln ergeben sich hieraus

a) für $x = 1$

b) für $x = 1$ und $\alpha = \frac{\pi}{3}$

c) für $x = 1$ und $\alpha = \frac{\pi}{4}$

d) für $x = 1$ und $\alpha = \frac{\pi}{6}$

78) Man entwickele in Reihen, welche nach steigenden Potenzen von x fortschreiten:

$$y_1 = \frac{1}{4} \log \frac{1 - 2x \cos 2\alpha + x^2}{(1 - x)^2}$$

$$y_2 = -\frac{1}{4} \log \left[(1 - 2 \cos 2\alpha + x^2)(1 - x^2)\right]$$

$$y_3 = \frac{1}{8} \log \left[\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^2 \frac{1 - 2x \cos 2\alpha + x^2}{1 + 2x \cos 2\alpha + x^2}\right]$$

$$y_4 = \frac{1}{8} \log \left[\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^2 \frac{1 + 2x \cos 2\alpha + x^2}{1 - 2x \cos 2\alpha + x^2}\right]$$

79) Es ist der Ausdruck

$$l(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^4) \cdots\cdots$$

in eine Reihe zu verwandeln von der Form

$$a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots\cdots$$

und zu zeigen, dass der numerische Werth von a_n erhalten wird, indem man die Summen aller Theiler der Zahl n durch n dividiert.

Vergl. Nouvell. Ann., Tom 9, p. 73.

80) Denselben Ausdruck entwickele man in eine Reihe von der Form

$$a_1\left(\frac{x}{1-x}\right) + a_2\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) + a_3\left(\frac{x^3}{1-x^3}\right) + a_4\left(\frac{x^4}{1-x^4}\right) + \cdots$$

81) Man entwickle den Logarithmus der unendlichen als unbedingt convergent vorausgesetzten Reihe:

$$(1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \cdots)$$

in eine Potenzreihe.

Mit Zuhilfenahme der in der vorhergehenden Aufgabe gewonnenen Beziehung verwandle man in Reihen:

82) $a)\; ll(1+x)$

$b)\; l\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots\right)$

$c)\; l\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots\right)$

$d)\; l\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots\right)$

83) $a)\; l\left(x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{x^9}{9} + \cdots\right)$

$b)\; l\left(\frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots}\right)$

D. Ueber goniometrische und cyclometrische Reihen.

84) Man stelle

$f(x) = \sin x$ durch Reihen dar, welche geordnet erscheinen nach den Potenzen von

$$\cos x,\; \operatorname{tg} x,\; \cot x,\; \sec x$$

85) Man stelle

$f(x) = \cos x$ durch Reihen dar, welche geordnet erscheinen nach den Potenzen von

$$\sin x,\; \operatorname{tg} x,\; \cot x,\; \operatorname{cosec} x$$

86) Man stelle
$f(x) = \operatorname{tg} x$ durch Reihen dar, welche geordnet erscheinen nach den Potenzen von
$$\sin x, \ \cos x, \ \sec x, \ \operatorname{cosec} x$$

87) Man stelle
$f(x) = \cot x$ durch Reihen dar, welche geordnet erscheinen nach den Potenzen von
$$\sin x, \ \cos x, \ \sec x, \ \operatorname{cosec} x$$

88) Man stelle
$f(x) = \sec x$ durch Reihen dar, welche geordnet erscheinen nach den Potenzen von
$$\sin x, \ \operatorname{tg} x, \ \cot x, \ \operatorname{cosec} x$$

89) Man stelle
$f(x) = \operatorname{cosec} x$ durch Reihen dar, welche geordnet erscheinen nach den Potenzen von
$$\cos x, \ \operatorname{tg} x, \ \cot x, \ \sec x$$

90) Man verwandle
$f(x) = \sin x$ in Reihen, welche fortschreiten nach den steigenden Potenzen von
$$\sin \frac{x}{2}, \ \cos \frac{x}{2}, \ \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

91) Man verwandle
$f(x) = \cos x$ in Reihen, welche fortschreiten nach den steigenden Potenzen von
$$\sin \frac{x}{2}, \ \cos \frac{x}{2}, \ \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

92) Es sind
$$f(x) = \sin x \text{ und } F(x) = \cos x$$
in Reihen zu verwandeln, welche geordnet sind nach den steigenden Potenzen von
$$\sin 2x, \ \cos 2x$$

93) Man entwickle ferner folgende Functionen in Reihen:

a) $\dfrac{m \sin 2x + n \sin x}{p \cos x}$

b) $\cos x \cdot \operatorname{tg} 2x$

c) $\sin x \cdot \cos 2x$

und zwar:

a) in eine Reihe, welche nach den steigenden Potenzen von $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$

b) in eine Reihe, welche nach den steigenden Potenzen von $\sin 2x$

c) in eine Reihe, welche nach den steigenden Potenzen von $\cos 2x$ fortschreitet.

94) Es sei

$$\begin{array}{ll} u_0 = \sin x & t_0 = \cos x \\ u_1 = \sin(x+h) & t_1 = \cos(x+h) \\ u_2 = \sin(x+2h) & t_2 = \cos(x+2h) \\ u_3 = \sin(x+3h) & t_3 = \cos(x+3h) \\ \vdots \qquad \vdots & \vdots \qquad \vdots \end{array}$$

man betrachte $u_0, u_1, u_2, u_3 \cdots\cdots$ und

$$t_0, t_1, t_2, t_3 \cdots\cdots$$

als Glieder von Reihen und drücke für jede dieser Reihen das Anfangsglied der n^{ten} Differenzenreihe durch eine nach den steigenden Potenzen von h fortschreitende Reihe aus. — Zwischen welchen Grenzen liegt der begangene Fehler, wenn man von der Entwicklung blos das erste Glied beibehält?

Es sei ferner $x = \frac{\pi}{6}$, und man soll bei einer Genauigkeit auf 10 Dezimalstellen

$$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \cdots\cdots$$
$$t_0 \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3 \cdots\cdots$$

als Glieder einer arithmetischen Reihe der zweiten Ordnung betrachten können; wie gross höchstens darf h in diesem Falle sein?

95) Es sind folgende Reihenentwicklungen zu beweisen:

a) $$\frac{a}{a^2 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \cos\varphi \cdot \cos\varphi + (1-a)\cos^2\varphi \cos 2\varphi + (1-a)^2 \cos^3\varphi \cos 3\varphi + \cdots$$

b) $$\frac{\operatorname{tg}\varphi}{a^2 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \cos\varphi \sin\varphi + (1-a)\cos^2\varphi \sin 2\varphi + (1-a)^2 \cos^3\varphi \sin 3\varphi + \cdots$$

c) $$\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4} + \frac{1}{8}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{8} + \frac{1}{16}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{16} + \cdots$$

96) Es seien

$u_0 = \log \sin x,\ u_1 = \log \sin (x + h),\ u_2 = \log \sin (x + 2h),$
$u_3 = \log \sin (x + 3h) \cdots\cdots\cdots$

die Glieder einer Reihe; man entwickle u_1, u_2, u_3 in Reihen, welche nach den steigenden Potenzen von h fortschreiten, berechne $\triangle^3 u_0$ und gebe für $x = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ die obere Grenze für das Intervall h an, um bei einer Genauigkeit auf 6 Dezimalstellen die obige Reihe als eine arithmetische der zweiten Ordnung behandeln zu können.

97) Dieselbe Aufgabe führe man durch für

$u_0 = \log \cos x,\ u_1 = \log \cos (x + h),\ u_2 = \log \cos (x + 2h),$
$u_3 = \log \cos (x + 3h) \cdots\cdots$

98) Die Function log cosec x ist in eine Reihe zu verwandeln, welche nach den steigenden Potenzen von $\cos^2 x$ fortschreitet.

99) Man entwickle den Ausdruck x arctang x in eine Reihe von der Form

$$A_1 \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) + A_2 \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + A^3 \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3 + \cdots\cdots$$

Welche bemerkenswerthe Eigenschaft der Binomialcoefficienten lässt sich aus der Vergleichung dieser Reihe mit

$$x \operatorname{arctang} x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{5} - \frac{x^8}{7} + \cdots\cdots$$

ableiten.

Klügel, Mathem. Wörterbuch, V. Bd., p. 360.

100) Man entwickle in Potenzenreihen:

$$a)\ \frac{1}{4}\, l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{arctang} x$$

$$b)\ \frac{1}{12}\, l\, \frac{(1+x)^2\,(1+x+x^2)}{(1-x)^2\,(1-x+x^2)} + \frac{1}{6}\sqrt{3} \operatorname{arctang} \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$$

$$c)\ \frac{1}{6}\, l\, \frac{1-x+x^2}{(1+x)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctang} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6}\right)$$

101) Man beweise:

$$\operatorname{arctang} x = \frac{2x}{4+x^2}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{4+x^2}\right) + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{x^2}{4+x^2}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$+ \frac{2x + x^3}{4 + 5x^2 + x^4} \left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{4 + 5x^2 + x^4}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{x^2}{4 + 5x^2 + x^4}\right)^2 + \cdots \right]$$

Vergl. Grunerts Archiv, 2. Bd.

102) Es sei $\operatorname{tg} y = \frac{x \sin \alpha}{1 - x \cos \alpha}$ man entwickle y in eine nach den steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe.

103) Folgende Functionen sind in Reihen zu verwandeln:

a) $2 \operatorname{arctang} \frac{x}{2 - x}$

b) $2 \operatorname{arctang} (x - 1)$

104) Es ist die Richtigkeit der folgenden Reihenentwicklung nachzuweisen:

$$\operatorname{arctang}(x + h) = \operatorname{arctang} x + \sin u \cdot \sin u -$$

$$- \frac{h^2}{2} \sin^2 u \sin 2u + \frac{h^3}{3} \sin^3 u \sin 3u - \cdots\cdots$$

wobei $\cot u = x$.

105) Es ist der Ausdruck

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

in eine Potenzenreihe von x zu verwandeln.

106) Es ist die zur Berechnung der Ludolph'schen Zahl von Sharp und Lagny benützte Reihe

$$\pi = 16 \sqrt{3} \left(\frac{1}{1.3.3} + \frac{2}{5.7.3^3} + \frac{3}{9.11.3^5} + \cdots \right)$$

abzuleiten.

In die Reihe für arctg x setze arc $x = \frac{\pi}{6}$. Mittels dieser Reihe berechnete Lagny π bis auf 127 Dezimalen, von welchen 114 richtig waren. Vergl. p. 88.

Mem. de Paris 1719, p. 155.

107) Man beweise folgende Reihen, welche mit Vortheil zur Berechnung von π benützt werden können.

a) $$\pi = 8 \left(\frac{26}{3.3^3} + \frac{58}{5.7.3^7} + \frac{90}{9.11.3^{11}} + \cdots \right) +$$

$$+ 8 \left(\frac{73}{3.7^3} + \frac{169}{5.7.7^7} + \frac{265}{9.11.7^{11}} + \cdots \right)$$

$$b)\ \pi = \frac{20}{7}\left(1 - \frac{1}{3.7^2} + \frac{1}{5.7^4} - \frac{1}{7.7^6} + \cdots\right) +$$
$$+ \frac{32}{79}\left(1 - \frac{1}{3.79^2} + \frac{1}{5.79^4} - \frac{1}{7.79^6} + \cdots\right)$$

$$c)\ \frac{\pi}{4} = \frac{296}{125}\left(\frac{1}{1.8} + \frac{1}{5.7.25^2} + \frac{1}{9.11.25^4} + \cdots\right) +$$
$$+ \frac{384}{125}\left(\frac{1}{5.7.25^2} + \frac{2}{9.11.25^4} + \frac{3}{13.15.25^6} + \cdots\right) -$$
$$- \frac{171362}{259^3}\left(\frac{1}{1.3} + \frac{9}{5.7.239^2} + \frac{1}{9.11.239^4} + \cdots\right) -$$
$$- \frac{228480}{239^3}\left(\frac{1}{5.7.239^2} + \frac{2}{9.11.239^4} + \frac{3}{13.15.239^6} + \cdots\right)$$

$$d)\ \frac{\pi}{4} = 8\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{3.10^3} + \frac{1}{5.10^5} - \cdots\right) -$$
$$- 4\left(\frac{1}{515} - \frac{1}{3.515^3} + \frac{1}{5.515^5} - \cdots\right) -$$
$$- \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \cdots\right)$$

$$e)\ \frac{\pi}{4} = \frac{5}{7}\left(1 - \frac{1}{3.7^2} + \frac{1}{5.7^4} - \cdots\right) +$$
$$+ \frac{1}{13}\left(1 - \frac{1}{3.26^2} + \frac{1}{5.26^4} + \cdots\right) -$$
$$- \frac{1}{2057}\left(1 - \frac{1}{3.2057^2} + \frac{1}{5.2057^4} - \cdots\right)$$

Ad *a*) bis *e*). Vergl. Crelle, Journal, Tom. 9, auch dieses Buch IX, 22.

$$f)\ \pi = \frac{24}{10}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{10^2} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{10^3} + \cdots\right) +$$
$$+ \frac{56}{100}\left(1 + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{100}\right) + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{2}{100}\right)^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{2}{100}\right)^3 + \cdots\right)$$

Vergl. Grunerts Archiv, Bd. 14.

$$g)\ \pi = \frac{32}{17}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{17} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{17^2} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{17^3} + \cdots\right) +$$
$$+ \frac{28}{50}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{50} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{50^2} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{50^3} + \cdots\right) +$$
$$+ \frac{104}{170}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{170} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{170^2} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{170^3} + \cdots\right)$$

$$h)\ \pi = \frac{96}{37}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{37} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{37^2} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{37^3} + \cdots\right) +$$
$$+ \frac{248}{481}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{962} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{962^2} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{962^3} + \cdots\right) -$$
$$- \frac{478}{28561}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{57122} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{57122^2} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{57122^3} + \cdots\right)$$

Wenn mit Hilfe der vorstehenden Reihen π auf 6 Dezimalstellen genau berechnet werden sollte, wie viele Glieder hätte man von jeder Reihe beizubehalten?

108) Man beweise ferner:

$$a)\ \frac{2}{\pi} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^3} + \frac{1}{2^3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^4} + \cdots$$

$$b)\ \frac{4}{\pi} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^3} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^4} + \frac{1}{2^3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^5} + \cdots$$

Vergl. Grunerts Archiv, Bd. 9 (Dienger).

$$c)\ \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \frac{1}{10^2-1} + \frac{1}{14^2-1} + \cdots$$

Vergl. Stern, Alg. Anal., p. 439.

$$d)\ \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{8^2-1} + \frac{1}{12^2-1} + \frac{1}{16^2-1} + \cdots$$

Grunerts Archiv, Bd. 9.

IX. Ueber unendliche Producte.

Man untersuche folgende unendliche Producte bezüglich ihrer Convergenz oder Divergenz.

Vergl. Grunerts Archiv, Bd. 21. Crelle, Journal, Bd. 51. Dr. Láska, Formelnsammlung, § 32.

Sei $\log(1 + \alpha_x) = \alpha_x - \varrho\alpha_x^2$ ϱ ein Mittelwerth, so wird

$$\Pi(1 + \alpha_x) = e^{\Sigma\alpha x - \varrho\Sigma\alpha x^2}$$

Zur Beurtheilung, ob ein unendliches Product convergiert oder divergiert, dient sodann folgende Tabelle:

$\lim \Sigma \alpha_x$	$\lim \Sigma \alpha_x^2$	$\lim \Pi$	Π
$-\infty$	B	0	convergent
$-\infty$	∞	0	„
A	B	C	„
A	∞	0	„
$+\infty$	B	∞	divergent
$+\infty$	∞	$\frac{\infty}{\infty}$	unbestimmt

1) $\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdots\cdots$

2) $\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{7}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right)\cdots\cdots$

3) $\left(1-\frac{2}{9}\right)\left(1-\frac{2.\ 5}{9.11}\right)\left(1-\frac{2.\ 5.\ 8}{9.11.13}\right)\left(1-\frac{2.\ 5.\ 8.11}{9.11.13.15}\right)\cdots\cdot$

4) $\left(1-\frac{3^2}{2^4}\right)\left(1-\frac{4^3}{3^5}\right)\left(1-\frac{5^4}{4^6}\right)\left(1-\frac{6^5}{5^7}\right)\cdots\cdots$

5) $\left(1+\log\sqrt{2}\right)\left(1+\log\sqrt[3]{3}\right)\left(1+\log\sqrt[4]{4}\right)\left(1+\log\sqrt[5]{5}\right)\cdots\cdots$

6) $\left[1+\frac{1}{2}\,l\,2\right]\left[1+\frac{2}{3}\,l\left(\frac{3}{2}\right)\right]\left[1+\frac{3}{4}\,l\left(\frac{4}{3}\right)\right]\left[1+\frac{4}{5}\,l\left(\frac{5}{4}\right)\right]\cdots\cdot$

7) $\left[1+l\,2\right]\left[1+l\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right]\left[1+l\left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right)\right]\left[1+l\left(\sqrt[4]{\frac{5}{4}}\right)\right]\cdots$

8) $\left[1+(m)_1(p)_1\right]\left[1+(m)_2(p)_2\right]\left[1+(m)_3(p)_3\right]\left[1+(m)_4(p)_4\right]\cdots$

9) $\left(1+\frac{1}{e^{\frac{4}{2}}}\right)\left(1+\frac{1}{e^{\frac{4}{2}+\frac{7}{2.3}}}\right)\left(1+\frac{1}{e^{\frac{4}{2}+\frac{7}{2.3}+\frac{10}{3.5}}}\right)+$

$\left(1+\frac{1}{e^{\frac{4}{2}+\frac{7}{2.3}+\frac{10}{3.5}+\frac{13}{4.7}}}\right)\cdots\cdot$

10) $\left(1-\frac{1}{a\sqrt{\log 2}}\right)\left(1-\frac{1}{a\sqrt{\log 3}}\right)\left(1-\frac{1}{a\sqrt{\log 4}}\right)\left(1-\frac{1}{a\sqrt{\log 5}}\right)\cdots$

11) $x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots$

12) $\left(1-\frac{2^2x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{2^2x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{2^2x^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots$

13) $\left(1-2\,\mathrm{tg}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\left(1-\frac{2^2}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\sqrt{\pi}}{4}\right)\left(1-\frac{2^3}{3}\,\mathrm{tg}\frac{\sqrt{\pi}}{8}\right)\times$
$\times\left(1-\frac{2^4}{4}\,\mathrm{tg}\frac{\sqrt{\pi}}{16}\right)\cdots\cdots$

14) $\left(1+\frac{\sin 1}{1}\right)\left(1+\frac{\sin\frac{1}{2}}{2}\right)\left(1+\frac{\sin\frac{1}{3}}{3}\right)\left(1+\frac{\sin\frac{1}{4}}{4}\right)\cdots\cdots$

15) $\left(1+\frac{1}{1}\right)\sqrt{1+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[4]{1+\frac{1}{4}}\cdots\cdots$

16) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[5]{5}\cdots\cdots$

17) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^2}\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{4}{3}\right)^3}\cdot\sqrt[5]{\left(\frac{5}{4}\right)^4}\cdots\cdots$

18) $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\cdots$

19) $\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdots\cdots$

20) $\left(1+1\right)\left(1-\frac{1.2}{3.5}\right)\left(1+\frac{1.2}{3.5}\cdot\frac{2.3}{4.6}\right)\left(1-\frac{1.2}{3.5}\cdot\frac{2.3}{4.6}\cdot\frac{3.4}{5.7}\right)\cdots$

21) $\left(1-\log\sqrt{2}\right)\left(1+\log\sqrt[3]{3}\right)\left(1-\log\sqrt[4]{4}\right)\left(1+\log\sqrt[5]{5}\right)\cdots$

22) $\left(1+\sqrt{l(2)}\right)\left(1+\sqrt{l\left(\frac{3}{2}\right)}\right)\left(1+\sqrt{l\left(\frac{4}{3}\right)}\right)\cdots\cdots$

23) $\left(1-\sqrt{\sqrt{e}-1}\right)\left(1+\sqrt{\sqrt[3]{e}-1}\right)\left(1-\sqrt{\sqrt[4]{e}-1}\right)\times$
$\times\left(1+\sqrt{\sqrt[5]{e}-1}\right)\cdots\cdots$

24) $\left(1+\sin 1\right)\left(1-\sin\frac{1}{2}\right)\left(1+\sin\frac{1}{3}\right)\left(1-\sin\frac{1}{4}\right)\cdots$

25) $\left(1-\cos 1\right)\left(1+\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\cos\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\cos\frac{1}{4}\right)\cdots\cdots$

26) $\left(1+\operatorname{tg} 1\right)\left(1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}\frac{1}{3}\right)\left(1-\operatorname{tg}\frac{1}{4}\right)\cdots\cdot$

27) $\left(1+\arcsin 1\right)\left(1-\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(1+\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\times$
$\times\left(1-\arcsin\sqrt{\frac{1}{4}}\right)\cdots\cdots$

28) $\left(1+1\right)\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}\cos a}\right)\left(1+\sqrt{\frac{1}{3}\cos a\cos\frac{a}{2}}\right)\times$
$\times\left(1-\sqrt{\frac{1}{4}\cos a\cos\frac{a}{2}\cos\frac{a}{3}}\right)\cdots\cdots$

29) $\left(1+1\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+2\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+3\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdots\cdots$

30) $\left(1+1\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+1\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1+1\right)\left(1-\frac{3}{4}\right)\cdots\cdots$

31) $\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\times$
$\times\left(1+\sqrt{\frac{1}{4}}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\cdots$

32) $2^2\left(1-\frac{1}{2}\right)2^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{2}{3}\right)2^2\left(1-\frac{3}{5}\right)2^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{4}{7}\right)\cdots\cdots$

33) $\left(1+\frac{1}{4}\right)^4\left(1-\frac{1}{9}\right)^9\left(1+\frac{1}{16}\right)^{16}\left(1-\frac{1}{25}\right)^{25}\cdots\cdots$

34) $\left(1+\frac{a^2}{2}\right)^2\left(1-\frac{a^{\frac{3}{2}}}{4}\right)^4\left(1+\frac{a^{\frac{4}{3}}}{8}\right)^8\left(1-\frac{a^{\frac{5}{4}}}{16}\right)^{16}\cdots\cdots$

35) $\left[1-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi+2}{\pi+3}\right)\right]^2\left[1+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi+4}{\pi+5}\right)\right]^4\times$
$\times\left[1+\frac{1}{8}\sin\left(\frac{\pi+6}{\pi+7}\right)\right]^8\left[1+\frac{1}{16}\sin\left(\frac{\pi+8}{\pi+9}\right)\right]^{16}\cdots\cdots$

36) $\left(\frac{1-q^2}{1-q}\right)^2\left(\frac{1-q^4}{1-q^3}\right)^2\left(\frac{1-q^6}{1-q^5}\right)^2\left(\frac{1-q^8}{1-q^7}\right)^2\cdots\cdots$

37) $\left(\frac{1+q^2}{1-q}\right)^2\left(\frac{1+q^4}{1-q^3}\right)^2\left(\frac{1+q^6}{1-q^5}\right)^2\left(\frac{1+q^8}{1-q^7}\right)^2\cdots\cdots$

38) $\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^2\left(\frac{1+q^3}{1-q^3}\right)^2\left(\frac{1+q^5}{1-q^5}\right)^2\left(\frac{1+q^7}{1-q^7}\right)^2\cdots\cdots$

39) $\left(\frac{1+q^2}{1+q}\right)^2 \left(\frac{1+q^4}{1+q^3}\right)^2 \left(\frac{1+q^6}{1+q^5}\right)^2 \left(\frac{1+q^8}{1+q^7}\right)^2 \cdots\cdots$

40) $\left(\frac{1-q^2}{1+q}\right)^2 \left(\frac{1-q^4}{1+q^3}\right)^2 \left(\frac{1-q^6}{1+q^5}\right)^2 \left(\frac{1-q^8}{1+q^7}\right)^2 \cdots\cdots$

41) $$\frac{1-2q^2\cos\frac{\pi u}{K}+q^4}{1+2q^2\cos\frac{\pi u}{K}+q^4} \cdot \frac{1-2q^4\cos\frac{\pi u}{K}+q^8}{1+2q^4\cos\frac{\pi u}{K}+q^8} \cdot$$

$$\cdot \frac{1-2q^6\cos\frac{\pi u}{K}+q^{12}}{1+2q^6\cos\frac{\pi u}{K}+q^{12}} \cdots\cdots$$

42) $\left(\frac{m^2-2^2}{a^2+4^2}\right)\left(\frac{m^2-4^2}{a^2+6^2}\right)\left(\frac{m^2-6^2}{a^2+8^2}\right)\left(\frac{m^2-8^2}{a^2+10^2}\right)\cdots\cdots$

43) $$\left[1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^2\right]\left[1-\frac{1}{3}\left(1+\frac{x^2}{3}\right)^3\right] \times$$

$$\times \left[1-\frac{1}{4}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^4\right]\left[1-\frac{1}{5}\left(1+\frac{x^2}{5}\right)^5\right]\cdots\cdots$$

44) $\left(\frac{2}{4}\cos\frac{x}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\cos\frac{x}{3}\right)\left(\frac{4}{6}\cos\frac{x}{4}\right)\left(\frac{5}{7}\cos\frac{x}{5}\right)\cdots\cdots$

45) $$\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\pi\sin x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} \left(\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\pi\sin\frac{x}{2}}\right)^{\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}} \times$$

$$\times \left(\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{3}}{1+\pi\sin\frac{x}{3}}\right)^{\frac{1}{3\operatorname{tg}\frac{x}{3}}} \left(\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{4}}{1+\pi\sin\frac{x}{4}}\right)^{\frac{1}{3\operatorname{tg}\frac{x}{4}}} \cdots\cdots$$

46) $$\frac{\arcsin\frac{1}{x}}{\operatorname{arctang}\frac{ax}{b+2ax^2}} \cdot \frac{\arcsin\frac{1}{2x}}{\operatorname{arctang}\frac{ax}{b+2.4ax^2}} \cdot \frac{\arcsin\frac{1}{3x}}{\operatorname{arctang}\frac{ax}{b+2.9ax^2}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\arcsin\frac{1}{4x}}{\operatorname{arctang}\frac{ax}{b+2.16ax^2}} \cdots\cdots$$

47) Folgende Productenformeln sind abzuleiten:

$$a)\ \operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n}=\left(\frac{m}{n-m}\right)\left(\frac{2n-m}{n+m}\right)\left(\frac{2n+m}{3n-m}\right)\left(\frac{4n-m}{3n+m}\right)\left(\frac{4n+m}{5n-m}\right)\cdots\cdot$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{n}{n-m}\right)\cdot\frac{1(2n-m)}{2(1n+m)}\cdot\frac{3(2n+m)}{2(3n-m)}\cdot\frac{3(4n-m)}{4(3n+m)}\cdots\cdot\cdot$$

$$b)\ \sec\frac{m\pi}{2n}=\frac{n}{n-m}\cdot\frac{n}{n+m}\cdot\frac{3n}{3n-m}\cdot\frac{3n}{3n+m}\cdot\frac{5n}{5n-m}\cdots\cdot\cdot$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{n}{n-m}\right)\cdot\frac{2n}{n+m}\cdot\frac{2n}{3n-m}\cdot\frac{4n}{3n+m}\cdot\frac{4n}{5n-m}\cdots\cdot\cdot$$

$$c)\ \operatorname{cosec}\frac{m\pi}{2n}=\frac{n}{m}\cdot\frac{n}{2n-m}\cdot\frac{3n}{2n+m}\cdot\frac{3n}{4n-m}\cdot\frac{5n}{4n+m}\cdots\cdot\cdot$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{2n}{2n-m}\cdot\frac{2n}{2n+m}\cdot\frac{4n}{4n-m}\cdot\frac{4n}{4n+m}\cdots\cdot\cdot$$

Vergl. Euler, Einleitung in die Anal., § 186.

$$d)\ \frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{18}{17}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{24}{23}\cdots\cdot\cdot$$

Vergl. Stern, Alg. Anal., p. 374.

$$e)\ \frac{\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{8}{5}\cdot\frac{16}{21}\cdot\frac{40}{33}\cdot\frac{66}{65}\cdot\frac{96}{85}\cdots\cdot\cdot$$

$$f)\ \sqrt{3}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{14}{15}\cdot\frac{16}{15}\cdots\cdot\cdot$$

$$g)\ \sqrt{3}=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{14}{13}\cdot\frac{16}{17}\cdot\frac{18}{19}\cdots\cdot\cdot$$

Vergl. Stern, Alg. Anal., p. 374, 375.

48) Es ist

$$\sqrt[r]{a}=P_0P_1P_2P_3\cdots\cdot P_n\cdots\cdot$$

für $P_n=\frac{(na+1)r+1}{(na+1)r}\cdot\frac{(na+2)r+1}{(na+2)r}\cdots\frac{((n+1)a-1)r+1}{((n+1)a+1)r}\cdot$

$\cdot\frac{(n+1)ar+1}{(n+1)ar+a};$

der Fehler, welchen man begeht, wenn man von dem unendlichen Producte blos die ersten $n+1$ Factoren beibehält, beträgt weniger als

$$P_0P_1P_2\cdots P_n\frac{a-1}{(n+1)ar+1}$$

Vergl. Bulletin's de l'Academie de Bruxelles 1849.

49) Man bestimme für folgende unendliche Producte sowohl das Product der n ersten Factoren als auch den Grenzwerth dieses Productes:

a) $\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdot\cos\frac{x}{2^4}\cdots\cdots$

b) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots$

c) $\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot$
$\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdots\cdot$

d) $\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{4}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{4}}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{8}}{\operatorname{tg}\frac{x}{4}-\operatorname{tg}\frac{x}{8}}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{16}}{\operatorname{tg}\frac{x}{8}-\operatorname{tg}\frac{x}{16}}\cdot$
$\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{32}}{\operatorname{tg}\frac{x}{16}-\operatorname{tg}\frac{x}{32}}\cdots\cdots$

e) $\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{x}{3}\right)\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{x}{3^2}\right)\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{x}{3^3}\right)\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{x}{3^4}\right)\cdots$

f) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{9}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{9}\right)\cdots\cdots$

g) $\left(4-3\cos\frac{x}{3}\right)\left(4-3\cos\frac{x}{3^2}\right)\left(4-3\cos\frac{x}{3^3}\right)\left(4-3\cos\frac{x}{3^4}\right)\cdots\cdots$

h) $\left(1-4\sin^2\frac{x}{4}\right)\left(1-4\sin^2\frac{x}{8}\right)\left(1-4\sin^2\frac{x}{16}\right)\left(1-4\sin^2\frac{x}{32}\right)\cdots\cdot$

50) Folgende unendliche Producte sind in Reihen zu verwandeln:

a) $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\cdots$

b) $\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\cdots$

c) $\left(1+\frac{1}{u_1}\right)\left(1-\frac{1}{u_2}\right)\left(1+\frac{1}{u_3}\right)\left(1-\frac{1}{u_4}\right)\cdots\cdots$ wenn
$u_n = 2^{n+1} - u_{n-1}$ und $u_1 = 2$

d) $\left(1-\frac{m^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{3^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{4^2}\right)\cdots\cdots$

e) $\left(\frac{3}{4-x^2}\right)\left(\frac{15}{16-x^2}\right)\left(\frac{35}{36-x^2}\right)\left(\frac{63}{64-x^2}\right)\cdots\cdots$

f) $\left(\frac{1^2}{1-x^2}\right)\left(\frac{3^2}{3^2-x^2}\right)\left(\frac{5^2}{5^2-x^2}\right)\left(\frac{7^2}{7^2-x^2}\right)\cdots\cdots$

g) $(1+x)\,(1+x^2)\,(1+x^4)\,(1+x^8)\cdots\cdots$

h) $(1-x)\,(1-x^2)\,(1-x^3)\,(1-x^4)\cdots\cdots$

51) Man zeige, dass das unendliche Product

$$\left(1+\frac{z}{1-z}\right)\left(1+\frac{rz}{1-rz}\right)\left(1+\frac{r^2z}{1-r^2z}\right)\left(1+\frac{r^3z}{1-r^3z}\right)\cdots\cdots$$

sich in die Reihe.

$$1+\frac{z}{1-r}+\frac{z^2}{(1-r)(1-r^2)}+\frac{z^3}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)}\cdots\cdots$$

verwandeln lässt, und beweise mit Hilfe dieser Beziehung folgende von Gauss aufgestellte Theoreme:

a) Die Summe der Reihe

$$1-\frac{1-q^n}{1-q}+\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)}-\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})(1-q^{n-2})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\cdots$$

ist entweder Null oder

$$(1-q)\,(1-q^3)\,(1-q^5)\cdots\cdots(1-q^{n-1})$$

je nachdem n eine ungerade oder eine gerade Zahl ist.

b) Unter der Voraussetzung, dass n eine positive und ganze Zahl ist, hat man

$$1+\frac{(1-q^n)}{1-q}\cdot q^{\frac{1}{2}}+\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)}\,q^{\frac{2}{2}}+$$

$$+\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})(1-q^{n-2})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}\,q^{\frac{3}{2}}+\cdots\cdots$$

$$=\left(1+q^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+q^{\frac{2}{2}}\right)\left(1+q^{\frac{3}{2}}\right)\cdots\cdots\left(1+q^{\frac{n}{2}}\right)$$

Vergl. Crelle, Journal, Tom. 39, p. 288. Nouvelles Annal., Tom. 9, p. 414.

52) Man verwandle:

a) $(1+x)\,(1+x^2)\,(1+x^3)\,(1+x^4)\,(1+x^5)\cdots\cdots$

b) $\frac{1}{(1-x)\,(1-x^2)\,(1-x^3)\,(1-x^4)\,(1-x^5)}\cdots\cdots$

c) $(1+xz)\,(1+x^2z)\,(1+x^3z)\,(1+x^4z)\,(1+x^5z)\cdots\cdots$

d) $(1+x^{a_1}z)\,(1+x^{a_2}z)\,(1+x^{a_3}z)\,(1+x^{a_4}z)\,(1+x^{a_5}z)\cdots\cdots$

e) $\frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\ldots\ldots}$

f) $\frac{1}{(1-x^az)(1-x^{a^2}z)(1-x^{a^3}z)(1-x^{a^4}z)(1-x^{a^5}z)\ldots\ldots}$

in Reihen, welche für *a*) und *b*) nach den steigenden Potenzen von x und für *c*) *d*) *e*) und *f*) nach den steigenden Potenzen von z fortschreiten. — Aus den Gesetzen, nach welchen die in diesen Reihen auftretenden Coefficienten gebildet sind, lassen sich mehrere Eigenschaften der ganzen Zahlen in Betreff der verschiedenen möglichen Arten ihrer Entstehung durch Addition ableiten; wie lauten diese? Vergl. Euler, Einleitung in die Analysis etc., § 297 u. f.

53) Man verwandle die Ausdrücke

$$P_1,\ P_2,\ \frac{1}{P_1},\ \frac{1}{P_2},\ \frac{P_2}{P_1},\ \frac{P_1}{P_2},$$

in welchen

$$P_1 = \Pi\left(1-\frac{1}{m^n}\right)$$

$$P_2 = \Pi\left(1-\frac{1}{m^{2n}}\right)$$

ist (für m alle möglichen Primzahlen, mit 2 beginnend, gesetzt), in Reihen, und beweise die Richtigkeit folgender Gleichungen:

a) $\frac{\pi^2}{6} = \frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\cdot\frac{11^2}{11^2-1}\ldots\ldots$

b) $\frac{\pi^2}{15} = \frac{2^2}{2^2+1}\cdot\frac{3^2}{3^2+1}\cdot\frac{5^2}{5^2+1}\cdot\frac{7^2}{7^2+1}\cdot\frac{11^2}{11^2+1}\ldots\ldots$

c) $\frac{\pi^4}{90} = \frac{2^4}{2^4-1}\cdot\frac{3^4}{3^4-1}\cdot\frac{5^4}{5^4-1}\cdot\frac{7^4}{7^4-1}\cdot\frac{11^4}{11^4-1}\ldots\ldots$

d) $\frac{\pi^4}{105} = \frac{2^4}{2^4+1}\cdot\frac{3^4}{3^4+1}\cdot\frac{5^4}{5^4+1}\cdot\frac{7^4}{7^4+1}\cdot\frac{11^4}{11^4+1}\ldots\ldots$

e) $\frac{\pi^8}{9450} = \frac{2^8}{2^8-1}\cdot\frac{3^8}{3^8-1}\cdot\frac{5^8}{5^8-1}\cdot\frac{7^8}{7^8-1}\cdot\frac{11^8}{11^8-1}\ldots\ldots$

Vergl. Euler, Analys. etc., § 277.

54) Aus der Wallis'schen Formel:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\ldots\ldots$$

sind mit Benützung der Eigenschaften der Differenzenreihen folgende Reihen, in welchen a und b beliebige Constanten bedeuten, abzuleiten.

1) $\frac{3a-4b}{12}\cdot\pi = \frac{6a-13b}{9} + \left(\frac{1}{3}\right)a + \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\right)(b+a) +$

$+ \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}\right)(b+2a) +$

$+ \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{6}{9}\right)(b+3a) + \cdots\cdots$

2) $(4b+a)\cdot\frac{1}{\pi} = b + \left(\frac{1}{2}\right)^2(b+a) + \left(\frac{1.1}{2.4}\right)^2(b+2a) +$

$+ \left(\frac{1.1.3}{2.4.6}\right)^2(b+3a) + \left(\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\right)^2(b+4a) + \cdots\cdots$

Vergl. Nouvell. Annal. Tom. 18.

55) Folgende Reihen sind in Producte zu verwandeln:

a) $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \cdots\cdots$

b) $1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} - \cdots\cdots$

c) $1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} - \cdots\cdots$

Vergl. Euler, Analys. etc. § 283 u. f.

56) Es sei

$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) = 1 + \frac{(1-q^\alpha)(1-q^\beta)}{(1-q)(1-q^\gamma)}x +$

$+ \frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})(1-q^\beta)(1-q^{\beta+1})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})}x^2 + \cdots\cdots;$

man zeige, dass

$\varphi(\alpha, \beta, \beta, q, x) = \frac{1-q^\alpha x}{1-x}\varphi(\alpha, \beta, \beta, q, qx)$ ist,

und benütze diese Relation, um die Function $\varphi(\alpha, \beta, \beta, q, x)$ in ein unendliches Product zu verwandeln. Man gebe ferner die Producte an, welche den speciellen Fällen

$\varphi(-m, \beta, \beta, -q^m x)$

$\varphi(-\infty, \beta, \beta, q, -q^\infty x)$ und

$\varphi(\infty, \beta, \beta, q, -x)$

entsprechen.

57) Es ist unter der in der vorigen Aufgabe gemachten Voraussetzung folgende Gleichung zu beweisen:

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, q^{\gamma-\alpha-\beta}) = \prod_{n=0}^{n=\infty} \left[\frac{1-q^{\gamma+n-\alpha}}{1-q^{\gamma+n-\alpha-\beta}}\right] \prod_{n=0}^{n=\infty} \left[\frac{1-q^{\gamma+n-\beta}}{1-q^{\gamma+n}}\right]$$

58) Bezeichnet man die Summe der als convergent vorausgesetzten hypergeometrischen Reihe

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2\,\gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3\quad \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \dots$$

durch F $(\alpha, \beta, \gamma, x)$ und das unendliche Product

$$\prod_1^\infty \left(\frac{n}{n+a}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^a$$

durch ψ (a), so ist

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\psi(\gamma-1)\,\psi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\psi(\gamma-\alpha-1)\,\psi(\gamma-\beta-1)}$$

59) Speciell leite ab:

$$a)\ \frac{\pi}{2} = \frac{\psi\left(\frac{1}{2}\right)\psi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\psi(0)\,\psi(0)} = \prod_1^\infty \frac{4n^2}{4n^2-1}$$

$$b)\ \sin\frac{m\pi}{2} = \frac{m\,\psi\left(\frac{1}{2}\right)\psi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\psi\left(-\frac{m}{2}\right)\psi\left(\frac{m}{2}\right)}$$

und aus *b*) die bekannte Productenformel für sin x.

X. Ueber die Functionen complexer Variablen, und über complexe Reihen und Producte.

Vergl. Dr. Láska's Formelnsammlung § 5.

1) Der Ausdruck

$$\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{a + \sqrt{a^2 - b^2}} + \sqrt[n]{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$$

erscheint für $b^2 > a^2$ in imaginärer Form, besitzt aber gleichwohl, unter der Voraussetzung, dass die Wurzel-

grössen im allgemeineren Sinne aufgefasst werden, und das Product $\sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B}$ reell und positiv sein soll, n reelle Werthe; man bestimme dieselben.

2) Welche reelle Werthe besitzt der Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \log \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$$

der für $b^2 > a^2$ eine imaginäre Form annimmt?

3) Der Ausdruck

$$\sqrt{a} \cdot \operatorname{arctang} \sqrt{a x^2 - b^2}$$

wird für negative Werthe von a scheinbar imaginär; man bestimme seinen reellen Werth.

Man bestimme ferner die reellen Werthe folgender Ausdrücke:

4) $\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$, für $x > +1$

5) $\frac{\arccos \sqrt{1-x}}{\sin \sqrt{x}}$, für $x < 0$

6) $\frac{\arcsin(1+x) - \arcsin(1+2x)}{\arcsin(1+x) - \arcsin(1+2x)}$, für $x > 0$

7) $\log\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}}\right) \operatorname{arctang} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$, für $x^2 > a^2$

8) $\frac{\operatorname{arctang} \sqrt{x^2 - 5x + 6}}{\arccos(x-1)}$, für $+2 < x < +3$

9) $\frac{\log\left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x - 12}\right) - \arccos(4 - x)}{\sqrt{(x-3)(x+4)}}$, für $-4 < x < +3$

10) Man löse die auf pag. 12 angegebenen Aufgaben No. 4) und 5), wenn a als eine complexe, und $\frac{1}{\delta}$ als eine positive, ganze, ins Unendliche wachsende Zahl vorausgesetzt wird.

11) Es seien a und b complexe Grössen und $1 : \delta$ eine positive ganze Zahl, welche unendlich gross wird; man bestimme:

$$\lim \frac{a^\delta - b^\delta}{\delta}$$

12) Folgende Sätze lassen sich mit Zuhilfenahme von complexen Grössen leicht beweisen.

a) Das Product zweier Factoren, von welchen jeder eine Summe zweier Quadrate ist, lässt sich als eine Summe zweier Quadrate darstellen.

b) Das Product zweier Ausdrücke von der Form $a^2 + n b^2$ ist ein Ausdruck von derselben Form.

c) Das Product zweier Summen von vier Quadraten lässt sich als eine Summe von vier Quadraten darstellen.

13) Wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen und n eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet, so ist

$$e^{2n\pi i} = 1, \quad e^{1+2n\pi i} = e,$$

folglich auch

$$e^{(1+2n\pi i)^2} = e^{1-4n^2\pi^2+4n\pi i} = \left(e^{1+2n\pi i}\right)^{(1+2n\pi i)} = e^{1+2n\pi i} = e$$

Da aber $e^{1+4n\pi i}$ ebenfalls gleich e ist, so würde hieraus das absurde Resultat $e^{-4n^2\pi^2} = 1$ folgen. Es ist nun nachzuweisen, wo in der Herleitung dieses Resultates gefehlt wurde.

14) Die Function

$$y = \log tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

lässt sich in eine nach den steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln von der Form

$$a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7 + \cdots\cdots$$

und umgekehrt ist

$$x = a_1 y - a_3 y^3 + a_5 y^5 - a_7 y^7 + \cdots\cdots$$

Man beweise diesen Satz, indem man von der goniometrischen Function zu Exponentialgrössen übergeht. Theorem von Roberts, Nouv. Ann., Tom. 18, p. 118.

15) Bezeichnet man mit S_1 die Summe aller Binomialcoefficienten, welche in der Form $(m)_{4n+1}$ enthalten sind, und mit S_2, S_3, S_4 die Summen jener Coefficienten, welche beziehungsweise die Form $(m)_{4n+2}$, $(m)_{4n+3}$, $(m)_{4n}$ besitzen, so ist zu zeigen, dass

$$S_1 = \frac{2^m i + (1+i)^m - (1-i)^m}{4}$$

$$S_2 = \frac{2^m - (1+i)^m - (1-i)^m}{4}$$

$$S_3 = \frac{2^m i - (1+i)^m + (1-i)^m}{4i}$$

$$S_4 = \frac{2^m + (1+i)^m + (1-i)^m}{4i}$$

Diese in imaginärer Form erscheinenden Ausdrücke sind ihrer Wesenheit nach reell, und es sind daher dieselben in Ausdrücke reeller Form zu transformieren.

16) Man bestimme die Summen folgender Ausdrücke

$$\begin{array}{llllll}
a) & (m)_0 & + (m)_p & + (m)_{2p} & + (m)_{3p} & + \cdots\cdots = S_0 \\
b) & (m)_1 & + (m)_{p+1} & + (m)_{2p+1} & + (m)_{3p+1} & + \cdots\cdots = S_1 \\
c) & (m)_2 & + (m)_{p+2} & + (m)_{2p+2} & + (m)_{3p+2} & + \cdots\cdots = S_2 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
d) & (m)_{p-1} & + (m)_{2p-1} & + (m)_{3p-1} & + (m)_{4p-1} & + \cdots\cdots = S_{p-1}
\end{array}$$

mit Benützung der Relation

$$(1+\theta)^m = S^0 + S_1\theta + S_2\theta^2 + \cdots\cdots + S^{p-1}\theta^{p-1}$$

in welcher θ eine der p Wurzeln der Gleichung $\theta^p - 1 = 0$ bedeutet.

17) Als speciellen Fall der vorhergehenden Aufgabe bestimme man die Summen aller jener Binomialcoefficienten, welche beziehungsweise in der Form

$$(m)_{3n+1},\ (m)_{3n+2},\ (m)_{3n}$$

enthalten sind, und stelle die einfachen Relationen auf, welche zwischen diesen Summen bestehen, wenn m einen der Werthe $6n$, $6n+1$, $6n+2$, $6n+3$, $6n+4$, $6n+5$ besitzt.

18) Es sei

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots\cdots$$

bekannt; man bestimme die Summen

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots\cdots S_{p-1}$$

der Reihen

$$\begin{array}{lllll}
A_0 & + A_p\, x^p & + A_{2p}\, x^{2p} & + A_{3p}\, x^{3p} & + \cdots\cdots \\
A_1 & + A_{p+1}\, x^{p+1} & + A_{2p+1}\, x^{2p+1} & + A_{3p+1}\, x^{3p+1} & + \cdots\cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
A_{p-1} & + A_{2p-1}\, x^{2p-1} & + A_{3p-1}\, x^{3p-1} & + A_{4p-1}\, x^{4p-1} & + \cdots\cdots
\end{array}$$

mit Benützung der Gleichung

$$f(\theta_r x) = S_0 + S_1\theta_r + S_2\theta_r^2 + \cdots\cdots + S_{p-1}\theta_r^{n-1}$$

in welcher θ_r eine der p Wurzeln der positiven Einheit bezeichnet.

19) Als specielle Fälle der vorhergehenden Aufgabe behandle man die Potenzenreihen für e^x, $l(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$ und $\operatorname{arctang} x$.

Vergl. zu 15) bis 19) Nouv. Ann., Tom. 20, p. 8 et 319.

20) Ausgehend von der leicht zu beweisenden Reihenentwicklung:

$$\frac{x}{4}(3x-2) - \frac{1}{2}(1-x)^2\, l(1-x) = \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{3.4.5} + \cdots$$

leite man mit Benützung der in der Aufgabe No. 18 gewonnenen Resultate folgende Reihen ab:

$$a)\ \frac{1}{4}l2 = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{9.10.11} + \cdots\cdots$$

$$b)\ \frac{3}{4}l2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{7.8.9} + \frac{1}{11.12.13} + \cdots\cdots$$

$$c)\ \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}l2 = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{6.7.8} + \frac{1}{10.11.12} + \cdots\cdots$$

$$d)\ \frac{3}{4} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}l2 = \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{8.9.10} + \frac{1}{12.13.14} + \cdots\cdots$$

$$e)\ \frac{1}{2}l3 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{8.9.10} + \cdots\cdots$$

$$f)\ \frac{\pi\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{4}l3 = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{7.8.9} + \cdots\cdots$$

$$g)\ \frac{3}{4} - \frac{l3}{4} - \frac{\pi\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{6.7.8} + \frac{1}{9.10.11} + \cdots\cdots$$

$$h)\ \frac{5\operatorname{arctang}\frac{\sqrt{3}}{5}}{8\sqrt{3}} - \frac{11}{48}l7 + \frac{1}{2}l2 = \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{4.5.6}\cdot\frac{1}{8^2} + \frac{1}{7.8.9}\cdot\frac{1}{8^3} + \cdots\cdots$$

21) Es seien $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_{n-1}$ beliebige Grössen, man bestimme a_n so, dass folgende Gleichung stattfindet:

$$l\left(\frac{a_1+i}{a_1-i}\right) = l\left(\frac{a_2+i}{a_2-i}\right) + l\left(\frac{a_3+i}{a_3-i}\right)\cdots\cdots + l\left(\frac{a_{n-1}+i}{a_{n-1}-i}\right) + l\left(\frac{a_n+i}{a_n-i}\right)$$

Welche Werthe hat man den Grössen a_1, a_2 etc. beizulegen, um folgende Gleichungen zu erhalten, welche mit

Vortheil zur Berechnung der natürlichen Logarithmen der Zahlen 2, 3, 5 und 7 benützt werden können?

$$l2 = 6\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5.9^5} + \cdots\right) +$$
$$+ 2\left(\frac{1}{84} + \frac{1}{3.84^3} + \frac{1}{5.84^5} + \cdots\right) -$$
$$- 2\left(\frac{1}{21249} + \frac{1}{3.21249^3} + \frac{1}{5.21249^5} + \cdots\right)$$
$$l3 = 10\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5.9^5} + \cdots\right) +$$
$$+ 2\left(\frac{1}{117} + \frac{1}{3.117^3} + \frac{1}{5.117^5} + \cdots\right) -$$
$$- 2\left(\frac{1}{181249} + \frac{1}{3.181249^3} + \frac{1}{5.181249^5} + \cdots\right)$$
$$l2 + 2l3 - 3l5 + l7 = 2\left(\frac{1}{251} + \frac{1}{3.251^3} + \frac{1}{5.251^5} + \cdots\right)$$
$$5l2 - 2l3 - 2l5 + l7 = -2\left(\frac{1}{449} + \frac{1}{3.449^3} + \frac{1}{5.449^5} + \cdots\right)$$
$$5l2 + l3 + 2l5 - 4l7 = -2\left(\frac{1}{4801} + \frac{1}{3.4801^3} + \frac{1}{5.4801^5} + \cdots\right)$$
$$l2 + 7l3 - 4l5 - l7 = -2\left(\frac{1}{8749} + \frac{1}{3.8749^3} + \frac{1}{5.8749^5} + \cdots\right)$$

22) Folgende Ausdrücke, welche sämmtlich der Ludolph'schen Zahl π gleich sind, sollen abgeleitet werden:

a) $\frac{2}{i}\, l\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ *b*) $\frac{2}{i}\, l\,\frac{(2+i)(3+i)}{(2-i)(3-i)}$

c) $\frac{2}{i}\, l\,\frac{(5+i)^4\,(-239+i)}{(5-i)^4\,(-239+i)}$

d) $\frac{2}{i}\, l\,\frac{(10+i)^8\,(-515+i)^4\,(-239+i)}{(10-i)^8\,(-515-i)^4\,(+239-i)}$

e) $\frac{2}{i}\, l\,\frac{(3+i)^2\,(7+i)}{(3-i)^2\,(7-i)}$ *f*) $\frac{2}{i}\, l\,\frac{(5+i)^2\,(7+i)\,(8+i)^2}{(5-i)^2\,(7-i)\,(8-i)^2}$

g) $\frac{2}{i}\, l\,\frac{(7+i)^3\,(8+i)^2\,(18+i)^2}{(7-i)^3\,(8-i)^2\,(18-i)^2}$ *h*) $\frac{2}{i}\, l\,\frac{(8+i)^5\,(18+i)^2\,(57+i)^3}{(8-i)^5\,(18-i)^2\,(57-i)^3}$

i) $\frac{2}{i}\, l\,\frac{(13+i)^5\,(21+i)^5\,(31+i)^2\,(43+i)^2\,(57+i)^3}{(13-i)^5\,(21-i)^5\,(31-i)^2\,(43-i)^2\,(57-i)^3}$

Entwickelt man diese Ausdrücke in Reihen, so erhält man aus *a*) die von Leibnitz aufgestellte Reihe, aus *b*)

die Eulersche Doppelreihe, aus *c*) die von Machin zur Berechnung von π auf 100 Dezimalstellen benützte Reihe, aus *d*) die von Buzengeiger angegebene und aus *e*) die von Vega angewendete Reihe, um π auf 126 Dezimalstellen zu berechnen.

Zu 21) und 22) vergl. Crelle, Journal, Tom 9 (Schellbach). Wir geben hier eine Zusammenstellung der Berechnungen von π nach Bierens de Haan (Akad. Royale à Amsterdam 1858):

250 (a. Chr.)	Archimedes	auf	2	Stellen	genau
1464	Regiomontanus	„	3	„	„
1580	Rheticus	„	8	„	„
1579	Vieta	„	11	„	„
1619	Lud. van Ceulen	„	32	„	„
1717	Sharp	„	72	„	„
....	Machin	„	100	„	„
1719	Lagny	„	114	„	„
1842	Rutheford	„	152	„	„
1844	Dahse	„	200	„	„
1853	Shanks	„	318	„	„
1855	Richter	„	500	„	„
1872	Shanks	„	707	„	„

Die Bezeichnung π führte Euler in seiner Introductio in An. inf. Tom. I, p. 93, ein, wo er π auf 127 Stellen angibt und sagt: pro quo numero, brevitatis ergo scribam π. Die Irrationalität von e und π wurde zuerst von Lambert (Beiträge II, p. 159) erkannt. Sein Beweis wurde von Legendre (Éléments de Géom. 4. Note) vervollständigt. Dass beide Grössen nicht nur irrational, sondern auch transcendent sind, d. h. keine von ihnen Wurzel einer ganzzahligen algebraischen Gleichung ist, haben Hermitte und Lindemann gezeigt. Vergl. Hermitte, sur la fonct. expon. Paris 1874. Lindemann, math. Ann. Bd. 20, p. 213. Weierstrass, Sitz der Berl. Akad. der Wiss. 1885, p. 1067.

23) Es sei:

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) = 1 + \frac{(1-q^\alpha)(1-q^\beta)}{(1-q)(1-q^\gamma)} x +$$

$$+\frac{(1-q^{\alpha})\,(1-q^{\alpha+1})\,(1-q^{\beta})\,(1-q^{\beta+1})}{(1-q)\,(1-q^{2})\,(1-q^{\gamma})\,(1-q^{\gamma+1})}\,x^{2}+\cdots$$

g eine ins Unendliche wachsende Zahl und $z = e^{2xi}$; man bestimme zunächst:

$$\psi\,(z) = \varphi\,(-g,\,1,\,g,\,q^{2},\,z\,q^{2g+1})$$

$$\psi_1\,(z) = \sqrt{z}\,\varphi\,(-g,\,1,\,g,\,q^{2},\,z\,g^{2g+2})$$

$$\psi_2\,(z) = \varphi\left(1,\,\frac{\pi i}{lq},\,1+\frac{\pi i}{lq},\,q,\,q\,z\right)$$

$$\psi_3\,(z) = \varphi\left(1,\,\frac{\pi i}{\pi i+\mathrm{l}g},\,1+\frac{\pi i}{\pi i+lq},\,-\,q,\,q\,z\right)$$

$$\psi_4\,(z) = z\,\varphi\left(1,\,\frac{1}{2},\,\frac{3}{2},\,q^{4},\,q^{2}\,z^{2}\right)$$

$$\psi_5\,(z) = \sqrt{z}\,\varphi\left(1,\,\frac{1}{2},\,\frac{3}{2},\,q^{2},\,-\,q^{2}\,z\right)$$

$$\psi_6\,(z) = \sqrt{z}\,\varphi\left(1,\,\frac{1}{2},\,\frac{3}{2},\,q^{2},\,-\,q\,z\right)$$

$$\psi_7\,(z) = \varphi\left(\frac{\pi i}{2\,lq},\,1,\,1+\frac{\pi i}{2\,lq},\,q^{2},\,q\,z\right)$$

und ferner:

$$\psi\,(z) + \psi\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$\sqrt[4]{q}\,\left[\psi_1\,(z) - \psi_1\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

$$\cot x + i\left[\psi_2\,(z) - \psi_2\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

$$\mathrm{tg}\,x - i\left[\psi_3\,(z) - \psi_3\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

$$\frac{4q}{(1-q^{2})}\left[\psi_4\,(z) - \psi_4\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{2q}{1-q}\left[\psi_5\,(z) + \psi_5\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

$$\frac{2\sqrt{q}}{1-q}\left[\psi_6\,(z) + \psi_6\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

$$\psi_7\,(z) + \psi_7\left(\frac{1}{z}\right)$$

Folgende Reihen sind zu summieren:

Man vergleiche zu den folgenden Reihen: Tralles, Abhandl. der Berlin. Akademie 1820 und 1821. Dienger, Grunerts Archiv, Bd. 8 und die folgenden. Crelle, Journal, Bd. 4.

$$24)\begin{cases}\Sigma_1^\infty n x^{n-1} \cos(n-1)\varphi \\ \Sigma_1^\infty (n+1) x^n \sin n\varphi\end{cases}$$

$$25)\begin{cases}\Sigma_1^\infty \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} \cdot x^n \sin n\varphi \\ \Sigma_1^\infty \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} \cdot x^n \sin n\varphi\end{cases}$$

$$26)\begin{cases}\Sigma_0^\infty \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3} \cdot x^n \cos n\varphi \\ \Sigma_1^\infty \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3} \cdot x^n \cos n\varphi\end{cases}$$

$$27)\begin{cases}\Sigma_1^\infty \left[x^{n-1}\cos(n-1)\varphi + x^n \cos n\varphi + \cdots + x^{2n-2}\cos(2n-2)\varphi\right] \\ \Sigma_1^\infty \left[x^{n-1}\sin(n-1)\varphi + x^n \sin n\varphi + \cdots + x^{2n-2}\sin(2n-2)\varphi\right]\end{cases}$$

$$28)\begin{cases}x\cos\varphi + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2\cos 2\varphi + \frac{1}{3}\cdot\frac{1.3}{2.4}x^3\cos 3\varphi + \\ + \frac{1}{4}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}x^4\cos 4\varphi + \cdots\cdots \\ x\sin\varphi + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\cdot\frac{1.3}{2.4}x^3\sin 3\varphi + \\ + \frac{1}{4}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}x^4\sin 4\varphi + \cdots\cdots\end{cases}$$

$$29)\begin{cases}x\cos\varphi + \frac{1}{1.2}x^2\cos 2\varphi + \frac{1}{2.3}\cdot\frac{1}{2}x^3\cos 3\varphi + \\ + \frac{1}{3.4}\cdot\frac{1.3}{2.4}x^4\cos 4\varphi + \cdots\cdots \\ x\sin\varphi + \frac{1}{1.2}x^2\sin 2\varphi + \frac{1}{2.3}\cdot\frac{1}{2}x^3\sin 3\varphi + \\ + \frac{1}{3.4}\cdot\frac{1.3}{2.4}x^4\sin 4\varphi + \cdots\cdots\end{cases}$$

$$30)\begin{cases}\Sigma_1^\infty \frac{x^n}{n}\cos n\varphi \\ \Sigma_1^\infty \frac{x^n}{n}\sin n\varphi\end{cases} \qquad 31)\begin{cases}\Sigma_0^\infty \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)\varphi \\ \Sigma_0^\infty \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\sin(2n+1)\varphi\end{cases}$$

$$32)\ \begin{cases} \Sigma_0^\infty\ (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \cos\,(2n+1)\,\varphi \\ \Sigma_0^\infty\ (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \sin\,(2n+1)\,\varphi \end{cases}$$

$$33)\ \begin{cases} \Sigma_1^\infty\ \dfrac{x^n}{n} \cos^2 n\varphi \\ \Sigma_1^\infty\ \dfrac{x^n}{n} \sin^2 n\varphi \end{cases} \quad 34)\ \begin{cases} \Sigma_0^\infty\ \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} \cos^2 (2n+1)\,\varphi \\ \Sigma_0^\infty\ \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} \sin^2 (2n+1)\,\varphi \end{cases}$$

$$35)\ \begin{cases} \Sigma_0^\infty\ (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} \cos^2 (2n+1)\,\varphi \\ \Sigma_0^\infty\ (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} \sin^2 (2n+1)\,\varphi \end{cases}$$

$$36)\ \begin{cases} \Sigma_0^\infty\ (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{2n\,!} \cos 2n\varphi \\ \Sigma_1^\infty\ (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{2n\,!} \sin 2n\varphi \end{cases}$$

$$37)\ \begin{cases} \Sigma_1^\infty\ (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos\,(2n+1)\,\varphi \\ \Sigma_1^\infty\ (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin\,(2n+1)\,\varphi \end{cases}$$

$$38)\ \begin{cases} \Sigma_0^\infty\ (-1)^n \left(-\dfrac{1}{2}\right)_n \cdot \dfrac{x^{2n+1} \cos\,(2n+1)\,\varphi}{2n+1} \\ \Sigma_0^\infty\ (-1)^n \left(-\dfrac{1}{2}\right)_n \cdot \dfrac{x^{2n+1} \sin\,(2n+1)\,\varphi}{2n+1} \end{cases}$$

$$39)\ \begin{cases} \Sigma_0^\infty\ T_{2n+1}\, x^{2n+1} \cos\,(2n+1)\,\varphi \\ \Sigma_0^\infty\ T_{2n+1}\, x^{2n+1} \sin\,(2n+1)\,\varphi \end{cases}$$

(T_{2n+1} bezeichnet den Coefficienten des allgemeinen Gliedes der Tangentenreihe.)

$$40)\ \begin{cases} \Sigma_0^\infty\ S_{2n}\, x^{2n} \cos 2n\varphi \\ \Sigma_1^\infty\ S_{2n}\, x^{2n} \sin 2n\varphi \end{cases}$$

(S_{2n} bezeichnet den Coefficienten des allgemeinen Gliedes der Secantenreihe.)

$$41)\ \begin{cases} \Sigma_1^\infty \left(1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \cdots\cdots \pm \dfrac{1}{n}\right) x^n \cos n\varphi \\ \Sigma_1^\infty \left(1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \cdots\cdots \mp \dfrac{1}{n}\right) x^n \cos n\varphi \end{cases}$$

42) $$\begin{cases} x \cos\varphi + \Sigma_1^\infty (-1)^n \dfrac{2.4.6\ldots\ldots 2n}{3.5.7\ldots.(2n+1)} x^{2n+1} \cos(2n+1)\varphi \\ x \sin\varphi + \Sigma_1^\infty (-1)^n \dfrac{2.4.6\ldots\ldots 2n}{3.5.7\ldots.(2n+1)} x^{2n+1} \sin(2n+1)\varphi \end{cases}$$

43) $$\begin{cases} \dfrac{\cos(a\alpha)}{r^a} + \dfrac{\cos(a+b)\alpha}{r^{a+b}} + \dfrac{\cos(a+2b)\alpha}{r^{a+2b}} + \dfrac{\cos(a+3b)\alpha}{r^{a+3b}} + \cdots \\ \dfrac{\sin(a\alpha)}{r^a} + \dfrac{\sin(a+b)\alpha}{r^{a+b}} + \dfrac{\sin(a+2b)\alpha}{r^{a+2b}} + \dfrac{\sin(a+3b)\alpha}{r^{a+3b}} + \cdots \end{cases}$$

44) $$\begin{cases} x^{2n+1} \cos(2n+1) + \\ + \sum\limits_{p=1} \dfrac{C_p{}^{[2(n+p)-1]^2}}{(2n+2)\ldots.(2n+2p+1)} \cdot x^{2n+2p+1} \cos(2n+2p+1)\varphi \\ x^{2n+1} \sin(2n+1)\varphi + \\ + \sum\limits_{p=1} \dfrac{C_p{}^{[2(n+p)-1]^2}}{(2n+2)\ldots.(2n+2p+1)} \cdot x^{2n+2p+1} \sin(2n+2p+1)\varphi \end{cases}$$

($C_p{}^{[2(n+p)-1]^2}$ bezeichnet die Summe der Combinationen ohne Wiederholungen aus den Elementen $1^2, 3^2 \cdots\cdot [2(n+p)-1]^2$ in der p^{ten} Klasse, wobei jede Complexion als Product gilt.)

45) $$\begin{cases} x^{2n} \cos 2n\varphi + \sum\limits_{p=1} \dfrac{C_p{}^{2^2(n+p-1)^2}}{(2n+1)\ldots.(2n+2p)} x^{n2+2p} \cos(2n+2p)\varphi \\ x^{2n} \sin 2n\varphi + \sum\limits_{p=1} \dfrac{C_p{}^{2^2(n+p-1)^2}}{(2n+1)\ldots.(2n+2p)} x^{2n+2p} \sin(2n+2p)\varphi \end{cases}$$

($C_p{}^{2^2(n+p-1)^2}$ bezeichnet die Summe der Combinationen ohne Wiederholungen der p^{ten} Klasse aus den Elementen $2^2, 4^2 \cdots\cdot 2^2(n+p-1)^2$, wobei jede Complexion als Product gilt.)

46) Wenn für die complexe Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots$$

die Reihe der Moduli convergiert, so convergiert auch die Reihe

$$\alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \cdots\cdots$$

wo $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots$ willkürliche endliche reelle oder complexe Grössen bedeuten, deren Moduli nicht ins Unendliche wachsen.

47) Eine Reihe ist unbedingt convergent, wenn die Moduli ihrer Glieder eine convergente Reihe bilden.

48) Wenn man in der Doppelreihe

$$\begin{array}{l} a_0 + a_1 \; x + a_2 \; x^2 + \cdots\cdots \\ + a_0' + a_1' \; x + a_2' \; x^2 + \cdots\cdots \\ + a_0'' + a_1'' \; x + a_2'' \; x^2 + \cdots\cdots \\ + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{array}$$

die Coefficienten der Horizontalreihen durch ihre Moduli ersetzt, und die Summen der so erhaltenen Reihen für einen positiven Werth x_0 eine convergente Reihe bilden, dann convergiert die Doppelreihe für alle Werthe von x, deren Moduli nicht grösser sind als x_0.

Folgende Functionen sind in unendliche Producte zu verwandeln:

49) $\frac{e^x - 2\cos\varphi + e^{-x}}{2(1 - \cos\varphi)}$

50) $\frac{e^{b+x} + e^{c-x}}{e^b + e^c}$

51) $\frac{e^{b+x} - e^{c-x}}{e^b - e^c}$

52) $\frac{e^x + e^{-x} + e_b + e^{-b}}{2 + e^b + e^{-b}}$

53) $\frac{e^x - e^{-x} + e^b - e^{-b}}{e^b - e^{-b}}$

54) $\frac{e^b - e^{-b} - e^x + e^{-x}}{e^b - e^{-b}}$

55) $\frac{e^x + e^{-x} - e^c - e^{-c}}{2 - e^b - e^{-b}}$

56) $\frac{\cos x + \cos\varphi}{1 + \cos\varphi}$

57) $\frac{\cos x - \cos\varphi}{1 - \cos\varphi}$

58) $\frac{\sin x + \sin\varphi}{\sin\varphi}$

59) $\cos x + \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \cdot \sin x$

60) $\cos x - \cot\frac{\varphi}{2} \cdot \sin x$

61) $\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi - x)}{\cos\frac{\varphi}{2}}$

62) $\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi - x)}{\sin\frac{\varphi}{2}}$

63) $\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi + x)}{\sin\frac{\varphi}{2}}$

Zu 49) bis 63) vergl. Euler, Einleitung etc. § 159—164.

64) Folgende Gleichungen sind zu beweisen:

a) $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{z-q}{2p}\cdot \pi i} + e^{\frac{q-z}{2p}\cdot \pi i}\right) = \Pi\left(1 + \frac{q}{pm}\right)\Pi\left(-1 \; \frac{z}{pm+q}\right)$

b) $\Pi\left\{\frac{1 + (h^2 + h_1 - 2)k^m + k^{2m}}{(1 + k^m)^2}\right\} = \Pi\left\{\frac{1 + (h_1^2 + h_1 - 2)k_1^m + k_1^{2m}}{(1 + k_1^m)^2}\right\}$

$$c)\ A\,(h - h^{-1})\ \Pi \left\{ \frac{1 + (h^2 + h^{-2})\,k^n + k^{2n}}{(1 - k^n)^2} \right\} =$$

$$= A'\,(h_1 - h_1^{-1})\ \Pi \left\{ \frac{1 - (h_1^2 + h_1^{-2})\,k_1^n + k_1^{2n}}{(1 - k_1^n)^2} \right\}$$

$$d)\ \Pi \left\{ \frac{1 - (h^2 + h^{-2})\,k^m + k^{2m}}{(1 - k^m)^2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\,(h_1 + h_1^{-1})\ \Pi \left\{ \frac{1 + (h_1^2 + h_1^{-2})\,k_{1n} + k_1^{2n}}{(1 + k_1^n)^2} \right\}$$

Hiebei bezeichnen A und A′ beliebige Grössen, ferner ist $h = e^{\frac{z\pi i}{2A}}$, $h_1 = e^{\frac{z\pi i}{2A'}}$, $k = e^{\frac{A'\pi i}{A}}$ und $k_1 = e^{\frac{A\pi i}{A'}}$. Für m hat man in der ersten Gleichung alle positiven und negativen, in den übrigen Gleichungen blos alle positiven ungeraden Zahlen und für n alle positiven geraden Zahlen — ausschliesslich der Null — zu setzen.

Vergl. Crelle, Journal, Bd. 29, p. 285.

65) Wenn $\varphi\,(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$ die in der Aufgabe No. 23 dieses Capitels angegebene Bedeutung besitzt, und

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^\alpha)\,(1 - {}^{\alpha+1}) \ldots (1 - q^{\alpha+n-1})\,(1 - q^\beta x)\,(1 - q^{\beta+1} x) \ldots}{(1 - q)\ \ (1 - q^2)\ \ \ldots (1 - q^n)\qquad (1 - q^\gamma x)\,(1 - q^{\gamma+1} x) \ldots}$$

$$\frac{(1 - q^{\beta+n-1} x)\, z^n}{(1 - q^{\gamma+n-1} x)}$$

gesetzt wird, so ergiebt sich aus der Entwickelung des Productes $S \cdot \varphi\,((\gamma - \beta, 1, 1, q, x q^\beta)$ unter Benützung der in der Aufgabe No. 56 des vorigen Capitels geforderten Productenformel folgende Relation:

$$a)\ \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - q^{\gamma+n}.x)}{(1 - q^{\beta+n}.x)}\, S =$$

$$= \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - q^{\alpha+n} z)}{(1 - q^n z)} \left\{ 1 + \frac{(1 - q^{\gamma-\beta}) \ldots (1 - {}^{\gamma+n-1-\beta}).(1 - z)\,(1 - qz) \ldots}{(1 - q)\quad \ldots (1 - q^n)\ \ (1 - q^\alpha z)\,(1 - q^{\alpha+1} z) \ldots}\right.$$

$$\left. \frac{(1 - q^{n-1} z)}{(1 - q^{\alpha+n-1} z)} \cdot q^{n\beta} x^n \right\}$$

aus welcher man durch Substitution gewisser Werthe für x und z leicht die Gleichungen

b) $\prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - q^{\gamma+n})}{(1 - q^{\beta+n})} \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, q^r) =$

$$= \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - q^{\alpha+r+n})}{(1 - q^{r+n})} \varphi(\gamma - \beta, r, \alpha + r, q, q^{\beta})$$

c) $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q^{\gamma-\alpha-\beta}) =$

$$= \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - q^{\beta+n})}{(1 - q^{\gamma+n})} \cdot \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - q^{\gamma+n-\alpha-\beta})}{(1 - q^{\gamma+n-\alpha-\beta})} \varphi(\gamma - \alpha - \beta, 1, 1, q^{\beta})$$

erhält.

Die vorstehenden Gleichungen benutze man nun, um folgende Formeln abzuleiten:

α) $\frac{\sqrt{q} \cdot \sin x}{1 - q} + \frac{\sqrt{q^3} \cdot \sin 3x}{1 - q^3} + \dots =$

$$= \sin x \cdot \left\{ \frac{\sqrt{q}(1 + q)}{1 - 2q \cos 2x + q^2} + \frac{\sqrt{q^3}(1 + q^3)}{1 - 2q^3 \cos 2x + q^6} + \dots \right\}$$

β) $\varphi\left(\alpha, 1, 1, q, q^{\frac{1}{2} - \alpha} e^{2xi}\right) \varphi\left(\alpha, 1, 1, q^{\frac{1}{2} - \alpha} e^{-2xi}\right) =$

$$= \prod_{0}^{\infty} \frac{\left(1 - 2q^{\frac{2n+1}{2}} \cos 2x + q^{2n+1}\right)}{\left(1 - 2q^{\frac{2n+1}{2} - \alpha} \cos 2x + q^{2n+2-2\alpha}\right)}$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{n-\alpha})^2}{(1 - q^n)(1 - q^{n-2\alpha})} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{\alpha}) \dots (1 - q^{\alpha+n-1})}{(1 - q^{1-\alpha}) \dots (1 - q^{n-\alpha})} q^{\frac{n}{2} - n\alpha} \cos 2nx \right\}$$

γ) $\frac{1 - 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + \dots}{(1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6)(1 - q^8) \dots} =$

$$= \prod_{n=0}^{\infty} (1 - 2q^{2n+1} \cos 2x + q^{4n+2})$$

δ) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - 2q^{2n-1} \cos 2x + q^{4n-2})}{(1 - 2q^{2n} \cos 2x + q^{4n})} =$

$$= \frac{1 + q}{1 - q} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{2n-1})^2}{(1 - q^{2n})^2} \left\{ 1 + \frac{2(1 - q^{-1})}{(1 - q^3)} q^2 \cos 2x + \right.$$

$$\left. + \frac{2(1 - q^{-1})(1 - q^1)}{(1 - q^3)(1 - q^5)} q^4 \cos 4x + \dots \right\}$$

66) Durch die Function

$$\Omega(q, a) = \prod_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q^{a+n+1}} \right)$$

welche für a = einer positiven ganzen Zahl + n den Werth $(1 - q)(1 - q^2) \cdots\cdots (1 - q^n)$ besitzt und für beliebige a den Relationen

$$\Omega(q, a) = (1 - q^a)\, \Omega(q, a - 1),$$

$$\frac{\Omega\left(q^2, \frac{1}{2}\right)\, \Omega\left(q^2, -\frac{1}{2}\right)}{(1 - q)} = \left\{ \frac{(1 - q^2)(1 - q^4) \ldots\ldots}{(1 - q)\;(1 - q^3) \ldots\ldots} \right\}^2$$

genügt, sich ferner in die Reihe

$$1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{(1 - q^a)(1 - q^{a-1}) \ldots (1 - q^{a-n+1})}{(1 - q)(1 - q^2) \ldots (1 - q^n)} \cdot q^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

verwandeln lässt, sind folgende Functionen auszudrücken:

$a)\ \varphi\left(\alpha, \beta, \gamma, q, q^{\gamma - \alpha - \beta}\right)$

$b)\ \varphi\left(\frac{xi}{\log q}, \frac{-xi}{\log q}, \frac{1}{2}, q^2, q\right)$

$c)\ \varphi\left(\frac{1}{2} + \frac{xi}{\log q}, \frac{1}{2} - \frac{xi}{\log q}, \frac{3}{2}, q^2, q\right)$

$d)\ \varphi\left(\frac{1}{2} + \frac{xi}{\log q}, \frac{1}{2} - \frac{xi}{\log q}, 2, q^2, q^2\right)$

wobei $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$ die in der 23. Aufgabe angegebene Bedeutung besitzt.)

Schliesslich ersetze man *a*) *b*) *c*) *d*) durch die unendlichen Reihen, welche sie darstellen, ebenso auch die Function Ω durch ihren Werth.

Vergl. Crelle, Journal, Bd. 34 (Heine).

XI. Ueber Kettenbrüche *).

1) Die gewöhnliche Reduction des Kettenbruches $[a_1, a_2, a_3 \ldots a_n]$ liefert für Zähler und Nenner des 5. Näherungsbruches $\frac{p_5}{q_5}$ die Werthe :

$$p_5 = a_2 a_3 a_4 a_5 + a_2 a_3 + a_2 a_5 + a_4 a_5 + 1$$

$$q_5 = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 + a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_5 + a_1 a_4 a_5 + \\ + a_3 a_4 a_5 + a_1 + a_3 + a_5$$

man ermittle das Bildungsgesetz dieser Ausdrücke, und beweise dessen allgemeine Giltigkeit.

2) Man entwickele für den Kettenbruch

$$\left[\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3} \ldots \frac{b_n}{a_n}\right]$$

ein Verfahren zur independenten Bildung der Näherungsbrüche.

---

*) Wir bezeichnen in Folgendem einen Kettenbruch von der allgemeinsten Form:

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ddots + \cfrac{b_{n-1}}{a_{n-1} + \cfrac{b_n}{a_n}}}}$$ durch $$\left[\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2} \ldots \frac{b_n}{a_n}\right]$$

setzen ferner:

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} = [a_1, a_2, \ldots a_n]$$

und

$$\cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \ddots \cfrac{1}{a_{n-1} - \cfrac{1}{a_n}}}} = (a, a_2, \ldots a_n)$$

3) Als besondere Fälle der vorstehenden Aufgaben berechne man den n^{ten} Näherungsbruch $\frac{p_n}{q_n}$ für folgende Kettenbrüche:

a) $[a, a, a, \cdots\cdots a]$

b) $[a, -a, a, -a, \cdots\cdots]$

c) $[a, b, a, b, \cdots\cdots]$

d) $[-a, b, -a, b, \cdots\cdots]$

e) $[a, -b, a, -b, \cdots\cdots]$

f) $\left[\frac{b}{a}, \frac{b}{a}, \cdots\cdots \frac{b}{a}\right]$

g) $\left[a, \frac{b}{a}, a, \frac{b}{a}, \cdots\cdots\right]$

h) $\left[\frac{b}{a}, a, \frac{b}{a}, a, \cdots\cdots\right]$

und zeige, dass $\frac{p_n}{q_n}$ für *a)* auch

$$= \frac{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4}+1}\right)^n - \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{2}+1}\right)^n}{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4}+1}\right)^{n+1} - \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4}+1}\right)^{n+1}} \text{ und für } f)$$

$$= \frac{b\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^n - b\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^n}{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{n+1} - \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{n+1}} \text{ ist.}$$

4) Es seien

a) $\frac{b}{a}, \frac{b-b^1}{a-a^1}, \frac{b-b^2}{a-a^2}, \frac{b-b^3}{a-a^3}$, etc.

b) $\frac{b}{a}, \frac{b^2}{a^2}, \frac{b^3}{a^3}, \frac{b^4}{a^4}$, etc.

c) $\frac{b}{a}, \frac{b^3}{a^3}, \frac{b^5}{a^5}, \frac{b^7}{a^7}$, etc.

d) $\frac{b^2}{a^2}, \frac{b^4}{a^4}, \frac{b^6}{a^6}, \frac{b^8}{a^8}$, etc.

e) $\frac{b}{a}, \frac{b^{n+1}}{a^{n+1}}, \frac{b^{2n+1}}{a^{2n+1}}, \frac{b^{3n+1}}{a^{3n+1}}$, etc.

auf einander folgende Näherungsbrüche von Kettenbrüchen: man berechne diese letzteren.

Wie man sieht, besitzen die Kettenbrüche *b)* und *c)* dieselben Werthe, wenn man von dem ersteren $2n - 1$ und von dem letzteren n Glieder beibehält; ebenso ist der $2n$ gliedrige Kettenbruch *b)* mit dem n gliedrigen *d)* identisch. Man beweise nun diese Eigenschaft auch dadurch, dass man je einen dieser Kettenbrüche in den andern verwandelt.

5) Folgende Gleichungen sind zu beweisen:

$$\alpha)\ \left\{a_1 + 1 + \left[\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \ldots \frac{a_{n-1}}{a_n}\right]\right\} \cdot \left[\frac{a_1}{a_1}, \frac{a_2}{a_2}, \ldots \frac{a_n}{a_n}\right] =$$

$$= a_1 + \left[\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \ldots \frac{a_{n-1}}{a_n}\right]$$

$$\beta)\ \left[\frac{1}{1}, -\frac{1}{a_1}, -\frac{a_1}{a_2}, -\frac{a_2}{a_3}, \ldots -\frac{a_{n-1}}{a_n}\right] =$$

$$= \left[\frac{a_1}{a_1}, -\frac{a_2}{a_2}, -\frac{a_3}{a_3}, \ldots -\frac{a_n+1}{a_n+1}\right]$$

$$\gamma)\ \left[-\frac{b_1}{a_1}, -\frac{b_2}{a_2}, -\frac{b_3}{a_3}, \ldots\right] =$$

$$= -1 + \left[\frac{1}{1}, \frac{b_1}{a_1 - b_1 - 1}, \frac{1}{1}, \frac{b_2}{a_2 - b_2 - 1}, \frac{1}{1}, \frac{b_3}{a_3 - b_3 - 1}, \ldots\right]$$

6) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Constanten der beiden Kettenbrüche

$$\left[\frac{1}{x + a_0}, -\frac{b_0}{x + a_1}, -\frac{b_1}{x + a_2}, - \ldots - \frac{b_{n-1}}{x + a_n}\right] \text{ und}$$

$$\left[\frac{1:x}{1}, \frac{p_1:x}{1}, \frac{p_2:x}{1}, \ldots \frac{p_{2n}:x}{1 + p_{2n+1}}\right]$$

wenn diese einander gleich sein sollen.

7) Es ist zu zeigen, dass sich der aufsteigende Kettenbruch

$$\cfrac{\alpha + \cfrac{\beta + \cfrac{\gamma + \cfrac{\delta + \cdots}{d}}{c}}{b}}{a}$$

in den absteigenden Kettenbruch

$$\left[\frac{\alpha}{a}, -\frac{a\beta}{b\alpha + \beta}, -\frac{b\alpha\gamma}{c\beta + \gamma}, -\frac{c\beta\delta}{d\gamma + \delta}, \ldots\right]$$

verwandeln lasse.

8) Man verwandle die Zahl 3·1415926 in einen Kettenbruch von der Form $a_0 + [a_1, a_2, \ldots a_n]$, bestimme $a_1, a_2 \ldots a_n$ so, dass die bei der Verwandlung auftretenden Divisionsreste die numerisch kleinsten Werthe erhalten, und berechne die auf einander folgenden Näherungsbrüche, so wie deren Differenzen mit dem wahren Werthe. Man betrachte

ferner die obige Zahl als angenäherten Werth der Ludolph'schen Zahl π (so dass der hiedurch begangene Fehler weniger als eine Einheit der letzten Dezimalstelle beträgt), und es frägt sich, ob der entwickelte Kettenbruch ebenfalls bis auf den letzten entwickelten Quotienten mit der Wahrheit übereinstimme? Endlich verwandle man auch obige Zahl in einen gemeinen Kettenbruch und berechne die Näherungswerthe, welche sich zwischen dem 1. und 3., dem 2. und 4., etc. Partialbruch einschalten lassen.

9) Man beweise, dass die Zähler und Nenner des Näherungsbruches $\left[\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots \frac{b_m}{a_m}\right]$ den Nennern der Brüche

$$\left[\frac{1}{a_m}, \frac{b_m}{a_{m-1}}, \dots \frac{b_3}{a_2}\right] \text{ und } \left[\frac{1}{a_m}, \frac{b_m}{a_{m-1}}, \dots \frac{b_2}{a_1}\right]$$

beziehungsweise gleich sind.

10) Aus dem in der vorigen Aufgabe aufgestellten Satze folgt unmittelbar, dass die beiden Näherungsbrüche $[a_1 \cdots a_m]$ und $[a_m \cdots a_1]$ gleiche Nenner besitzen; ferner ergeben sich auf einfache Weise noch folgende Relationen:

α) $[a_1 \cdots a_m]\,[a_m \cdots a_2] = [a_1 \cdots a_{m-1}]\,[a_m \cdots a_1]$ und

β) $[a_1 \cdots a_m]\,[a_2 \cdots a_m] \cdots [a_{m-1}, a_m]\,[a_m] =$

$= [a_m \cdots a_1]\,[a_{m-1} \cdots a_1] \cdots [a_2, a_1]\,[a_1]$

11) Von dem Kettenbruche $\left[\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots \frac{b_{m+n}}{a_{m+n}}\right]$ sei bekannt der reducierte Werth von $a_m + \left[\frac{b_{m+1}}{a_{m+1}}, \dots \frac{b_{m+n}}{a_{m+n}}\right]$, die reducierten Werthe von $a_l + \left[\frac{b_{l+1}}{a_{l+1}}, \dots \frac{b_{m-2}}{a_{m-2}}\right]$ und $a + \left[\frac{b_{l+1}}{a_{l+1}}, \dots \frac{b_{m-1}}{a_{m-1}}\right]$ und der Zähler des m^{ten} Gliedes, man berechne aus diesen Grössen den reducierten Werth von $a_l + \left[\frac{b_{l+1}}{a_{l+1}}, \dots \frac{b_{m+n}}{a_{m+n}}\right]$

12) Zwischen welchen Grenzen liegt der begangene Fehler, wenn man statt des vollständigen Kettenbruches $\left[\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right]$, in welchem alle Theilzähler und Theilnenner positive ganze Zahlen sind, den Näherungsbruch $\left[\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots \frac{b_{n-m}}{a_{n-m}}\right]$ nimmt?

13) Unter den Kettenbrüchen von specieller Form bietet insbesondere der Bruch

$$\cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{a_3 - \ddots}}}$$

interessante, durch die symbolische Bezeichnung $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$ einfach auszudrückende Beziehungen dar. Es ist nämlich zunächst:

$$\alpha) \begin{cases} a_1 - (a_2, \cdots a_n) = \dfrac{1}{(a_1, \ldots a_n)} \\ (a_1, \ldots a_n) = (a_1, a_2 - (a_3, \ldots a_n)) = (a_1, a_2, a_3, - (a_4, \ldots a_n)) = \\ \quad = (a_1, a_2, a_3, a_4, - (a_5, \ldots a_n)) \ldots\ldots \\ (a_1, a_2, \ldots a_n, \infty) = (a_1, a_2, \ldots a_n), \ (a_1, \ldots a_n, 0) = (a_1, \ldots a_{n-1}). \end{cases}$$

β) Ist $x = (a_1, a_2, \cdots, y)$, so ist umgekehrt $y = (a_n, a_{n-1} \cdots, x)$. Da jedem Werth von x nur ein Werth von y entspricht und umgekehrt, so muss zwischen x und y eine Gleichung von der Form $A + Bx + Cy + Dxy = 0$ bestehen, und es ist:

$$\frac{A}{B} = -(a_1, b_2, \ldots a_{n-1}), \quad \frac{A}{C} = -(a_n, \ldots a_2)$$

$$\frac{C}{D} = -(a_1, \ldots a_n), \quad \frac{B}{D} = -(a_n, \ldots a_1)$$

$$\frac{A}{D} = (a_1, \ldots a_n)\ (a_n, \ldots a_2) = (a_n, \ldots a_1)\ (a_1, \ldots a_{n-1})$$

γ) Die in der Aufgabe No. 10 aufgestellte Gleichung β) gilt auch für die jetzt betrachteten Kettenbrüche.

δ) Setzt man

$$\frac{1}{(a_1, \ldots a_n)\ (a_2, \ldots a_n)\ (a_{n-1}, a_n)\ (a_n)} = ((a_1, \ldots a_n)),$$

so ist: $((a_1, \ldots a_n)) = ((a_n, \ldots a_1))$

$$(a_1, \ldots a_n) = \frac{((a_2, \ldots a_n))}{((a_1, \ldots a_n))}$$

$$(a_n, \ldots a_1) = \frac{((a_{n-1}, \ldots a_1))}{((a_n, \ \ldots a_1))} = \frac{((a_1 \ldots a_{n-1}))}{((a_1 \ldots a_n \ ))}$$

$$((a_1 \ldots a_{n-1}))\ ((a_2 \ldots a_n)) - ((a_1 \ldots a_n))\ ((a_2 \ldots a_{n-1})) = 1$$

ε) Es ist $(a \ldots e, f;\ a_1 \ldots e_1, f_1;\ a_2 \ldots e_2, f_2;\ \ldots a_m \ldots e_m, f_m) =$

$$= \frac{1}{((a \ldots e))} \left\{ ((b \ldots)) + \cfrac{((a_1 \ldots e_1))}{((a_1 \ldots e_1)) - \cfrac{((a \ldots e))\ ((a_2 \ldots e_2))}{((a_1 \ldots e_2)) - \cfrac{((a_1 \ldots e_1))\ ((a_3 \ldots e_3))}{((a_2 \ldots e_3)) - \cfrac{((a_2 \ldots e_2))\ ((a_4 \ldots e_4))}{((a_3 \ldots e_4)) - \cfrac{\vdots}{((a_{m-1} \ldots e_m)) - \cfrac{((a_{m-1} \ldots e_{m-1}))}{((a_m \ldots e_m))\, f_m - ((a_m \ldots d_m))}}}}}} \right.$$

welche Gleichung die Aufgabe löst, den Kettenbruch $(a_1 \ldots a_n)$ in einen gleichwerthigen von geringerer Gliederzahl zu verwandeln.

ζ) Die beiden Kettenbrüche $(1,1,1,a_1,1,1,1,a_2,1,1,1,a_3 \ldots 1,1,1,a_n)$ und $(a_1, a_2, \cdots a_n)$ sind einander gleich.

η) Zwischen zwei auf einander folgende Glieder des Kettenbruches lassen sich neue Elemente $b_1, b_2 \cdots b_m$ einschalten, welche den Werth des Kettenbruches nicht ändern, wenn man von den Elementen $b_2, \cdots b_{m-1}$ alle willkürlich bis auf eines wählt, dieses aus der Gleichung $((b_2 \cdots b_{m-1})) = 1$ bestimmt, ferner $b_1 = ((b_3 \ldots b_{m-1}))$ und $b_m = ((b_2 \ldots b_{m-2}))$ macht. So ist z. B. $(a, b, c, d) = (a, b, 2, 1, 3, 1, 2, c, d)$.

14) Man betrachte die Nenner und Zähler der Näherungsbrüche des Kettenbruches $[a_1, a_2 \cdots a_n]$, in welchem $a_1, a_2, \cdots a_n$ als positive und ganze Zahlen angenommen worden, als rechtwinklige Coordinaten von Punkten in der Ebene; dann lassen sich die Eigenschaften der Näherungsbrüche geometrisch ableiten, insbesondere aber zeige man, dass:

α) $p_{m+1}\, q_m - p_m\, q_{m+1} = \pm 1$

β) für $p_m < \alpha < p_{m+1}$ und $q_m < \beta < q_{m+1}$ der numerische Werth von $\alpha - \beta\, [a_1, a_2, \cdots a_n]$ grösser ist, als jener von $p_m - q_m\, [a_1, a_2, \cdots a_n]$ und $p_{m+1} - q_{m+1}\, [a_1, a_2, \cdots a_n]$.

Es gelten folgende Sätze:

I. Der Kettenbruch

$$\left[\frac{b_1}{a_1}\ \frac{b_2}{a_2} \ldots\right]$$

in welchem alle a und b positiv sind, convergiert sicher, wenn

$$lim \frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}} > 0 \text{ für } lim\, n = \infty$$

II. Der Kettenbruch

$$\left[\frac{b_1}{a_1}, \frac{-b_2}{a_2}, \frac{-b_3}{a_3}, \ldots\right]$$

convergiert immer, wenn

$$\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3} \ldots$$

echte Brüche sind, deren Zähler und Nenner aus ganzen positiven Zahlen bestehen.

Bezüglich der Beweise siehe: Schlömilch, Handbuch der algebr. Analysis.

Folgende Kettenbrüche sind in Bezug ihrer Convergenz oder Divergenz zu untersuchen:

15) $\left[\frac{3^2}{1}, \frac{4^2}{2}, \frac{5^2}{3}, \frac{6^2}{4}, \ldots\right]$

16) $\left[\frac{1.2}{2}, \frac{2.3}{2^2}, \frac{3.4}{2^3}, \frac{4.5}{2^4}, \ldots\right]$

17) $\left[\frac{1}{2}, \frac{1.2^2}{3^2}, \frac{2^2.3^3}{4^3}, \frac{3^3.4^4}{5^4}, \ldots\right]$

18) $\left[\frac{a+1}{a-1}, \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}, \frac{\sqrt[3]{(a+1)^2}}{\sqrt[3]{(a-1)^2}}, \frac{\sqrt[4]{(a+1)^3}}{\sqrt[4]{(a-1)^3}}, \ldots\right]$

19) $\left[\frac{\frac{1}{1.2}}{\sin\frac{\pi}{2}}, \frac{\frac{1}{2.3}}{\sin\frac{\pi}{3}}, \frac{\frac{1}{3.4}}{\sin\frac{\pi}{4}}, \frac{\frac{1}{4.5}}{\sin\frac{\pi}{5}}, \ldots\right]$

20) $\left[\frac{\frac{3}{4}}{2\,\mathrm{tg}\frac{a^2}{2}}, \frac{\frac{5.4}{7.3}}{3\,\mathrm{tg}\frac{a^2}{3}}, \frac{\frac{7.7}{10.5}}{4\,\mathrm{tg}\frac{a^2}{4}}, \frac{\frac{9.10}{13.\ 7}}{5\,\mathrm{tg}\frac{a^2}{5}}, \ldots\right]$

21) $\left[\frac{l\left(\frac{3}{2}\right)}{a-(a-1)}, \frac{l\left(\frac{5}{4}\right)}{a+(a-1)}, \frac{l\left(\frac{7}{6}\right)}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}, \frac{l\left(\frac{9}{4}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}, \ldots\right]$

22) $\left[\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1}, \ldots \dfrac{\sum\limits_{r=0}^{r=2n} \frac{1}{\sqrt{n^2+r}}}{1}, \ldots\right]$

23) $\left[\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1}, \ldots \dfrac{\sum\limits_{r=0}^{r=n} \frac{1}{n+r}}{\sum\limits_{1}^{n} (-1)^{n+1} \frac{1}{r}}, \ldots\right]$

24) $\left[\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \ldots\right]$ 25) $\left[\frac{1.3}{1}, \frac{3.5}{1}, \frac{5.7}{1}, \ldots\right]$

26) $\left[\frac{2}{1}, \frac{1}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{1}, \frac{6}{1}, \frac{5}{1}, \ldots\right]$

27) $\left[1, \frac{2}{1}, \frac{2^3}{1}, \frac{2^6}{1}, \frac{2^{10}}{1}, \ldots\right]$ 28) $\left[1, \frac{2}{1}, \frac{2^2}{1}, \frac{2^3}{1}, \frac{2^4}{1}, \ldots\right]$

29) $\left[\frac{\alpha}{a^2}, \frac{\alpha^2}{a^2}, \frac{\alpha^3}{a^2}, \ldots\right]$ 30) $\left[\frac{m^2}{n}, \frac{(m+n)^2}{n}, \frac{(m+2n)^2}{n}, \ldots\right]$

31) $\left[\frac{1^k}{a^2}, \frac{2^k}{a^2}, \frac{3^k}{a^2}, \ldots\right]$ 32) $\left[\frac{1^k h^2}{a^2}, \frac{2^k(h^2+1)}{a^2}, \frac{3^k(h^2+2)}{a^2}, \ldots\right]$

33) $\left[\frac{k^{2r}.1.3.m^2}{a^2}, \frac{(k^2+l^2)^r.2.4.m^2}{a^2}, \frac{(k^2+2l^2)^r.3.5.m^2}{a^2}, \ldots\right]$

34) $\left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots\right]$

35) $\left[\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, - \ldots\right]$

36) $\left[\frac{2}{5}, -\frac{2.3}{5.6}, \frac{2.3.4}{5.6.7}, -\frac{2.3.4.5}{5.6.7.8}, \ldots\right]$

37) $\left[\frac{\sin 1}{1}, -\frac{\sin \frac{1}{2}}{2}, \frac{\sin \frac{1}{3}}{3}, -\frac{\sin \frac{1}{4}}{4}, \ldots\right]$

38) $\left[-\frac{1^2.3}{2^2.4^2}, \frac{2^2.4^2.6^2}{1^2.3^2.5^2}, -\frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}, \frac{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2}{1^2.3^2.5^2.7^2.9^2}, - \ldots\right]$

39) $\left[\frac{x}{1-x}, -\frac{x^2}{1-x^2}, \frac{x^3}{1-x^3}, -\frac{x^4}{1-x^4}, \ldots\right]$

40) $\left[\frac{1}{1+x}, -\frac{x}{2(1+x)(1+2x)}, \frac{2x_2}{3(1+x)(1+2x)(1+3x)}, -\right.$

$\left. -\frac{2.3x^3}{4(1+x)(1+2x)(1+3x)1+4x)}, \ldots\right]$

41) $\left[-\frac{x}{y+1}, \frac{x+1}{y+2}, -\frac{x+2}{y+3}, \frac{x+3}{y+4}, -\ldots\right]$

42) Es ist zu zeigen, dass sich der unendliche Kettenbruch $m+\left[\frac{n}{m+1}, \frac{n+1}{m+2}, \frac{n+2}{m+3}, \ldots\right]$, in welchem m und n positive und ganze Zahlen bedeuten und $n \geqq m+2$ ist, in den endlichen Kettenbruch

$$\left[\frac{n-1}{-m+1}, \frac{n-2}{-m+2}, \frac{n-3}{-m+3}, \ldots \frac{1}{-m+n-1}\right],$$

welcher den Werth

$$\frac{(n-1)\{1+(n-m-2)_1 (n-2)+(n-m-2)_2 (n-2)(n-3)+\ldots}{1+(n-m-2)_1 (n-1)+(n-m-2)_2 (n-1)(n-2)+\ldots}$$
$$\frac{\ldots (n-m-2)_{n-2} (n-2)(n-3\ldots 2.1\}}{\ldots (n-m-2)_{n-1} (n-1)(n-2)\ldots 2.1}$$

besitzt, verwandeln lässt. Ferner beweise man, dass auch die beiden endlichen Kettenbrüche

$$m+1+\left[\frac{n-m-2}{m+3}, \frac{n-m-3}{m+4}, \ldots \frac{1}{n}\right] \text{ und}$$

$$1+\left[\frac{n-m-1}{-m-1}, \frac{n-m}{-m}, \frac{n-m+1}{-m+1}, \ldots \frac{1}{-n+1}\right]$$

dem unendlichen Kettenbruche dem Werthe nach gleich sind.

43) Der unendliche Kettenbruch

$$m+\left[\frac{n}{m+d}, \frac{n+d}{m+2d}, \frac{n+2d}{m+3d}, \ldots\right]$$

wo m, n, d ganze positive Zahlen bedeuten, $n > m+d$ und $\frac{n}{d}$ eine ganze Zahl ist, lässt sich in den gleichgeltenden endlichen Kettenbruch

$$\left[\frac{n-d}{-m+d}, \frac{n-2d}{-m+2d}, \frac{n-3d}{-m+3d}, \ldots\right]$$

verwandeln, und besitzt somit einen rationalen Werth.

44) Der Werth des unendlichen Kettenbruches

$$m - \left[\frac{n}{m+1}, -\frac{n+1}{m+2}, -\frac{n+2}{m+3}, \cdots\right]$$

(in welchem m und $n \gtreqless m$ positive ganze Zahlen sind), ist durch Verwandlung in einen gleichgeltenden endlichen Kettenbruch zu bestimmen.

45) Der unendliche Kettenbruch

$$m - \left[\frac{n}{m+d}, -\frac{n+d}{m+2d}, -\frac{n+d}{m+3d}, \cdots\right],$$

in welchem m, n, d und $\frac{n}{d}$ positive ganze Zahlen bezeichnen, und $n \geqq m + d - 1$ ist, besitzt einen rationalen, dem endlichen Kettenbruche

$$\left[\frac{n-d}{m-d}, -\frac{n-2d}{m-2d}, -\frac{n-3d}{m-3d}, \cdots\right]$$

gleichen Werth.

46) Es ist der periodische Kettenbruch $[a_1, a_2, \cdots a_n, a_1, a_2, \cdots]$, welcher eine n gliederige Periode besitzt, in einen Kettenbruch von eingliederiger Periode zu verwandeln, und der Werth des Näherungsbruches zu berechnen, welcher m Perioden des Kettenbruches entspricht.

47) Wenn man in dem periodischen Kettenbruche $\left[\frac{b}{a}, \cdots\right]$ an die Stelle von b und a beziehungsweise die Grössen $-b^2$ und $a^2 + 2b$ treten lässt, so erhält man einen neuen periodischen Kettenbruch, welcher das negativ genommene Quadrat des ersteren ist. Um ferner einen periodischen Kettenbruch zu erhalten, welcher der dritten Potenz des ursprünglichen gleich ist, ersetze man b durch b^3 und a durch $a^3 + 3ab$. Man beweise und erweitere diese Eigenschaft.

48) Man beweise:

$$\sqrt{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\,(6, 6, 6, \cdots)$$
$$= \frac{17}{12} - \frac{1}{12}\,(34, 34, 34, \cdots)$$
$$= \frac{7}{5} + \frac{1}{5}\,[14, 14, 14, \cdots]$$

$$\sqrt{3} = \frac{15}{8} - \frac{1}{8}\,(62,\ 62,\ 62, \cdots)$$

$$= \frac{15}{8} - \frac{1}{8.62} - \frac{1}{8.62}\,(3842,\ 3842,\ 3842, \cdots)$$

$$\sqrt{6} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\,(10,\ 10,\ 10, \cdots)$$

$$\sqrt{7} = 2 + \frac{1}{19}\left\{12 + \left[\frac{27}{100}, \frac{27}{100}, \frac{27}{100}, \cdots\right]\right\}$$

$$\sqrt{17} = 3 + \frac{2}{11}\left\{6 + \left[\frac{8}{45}, \frac{8}{45}, \frac{8}{45}, \cdots\right]\right\}$$

Für $\sqrt{a^2 \pm b}$ ist

$$a \pm b \cdot \frac{(2a)^{r-1} \pm (r-2)\,(2a)^{r-3}\,b + (r-3)_2\,(2m)^{r-5}\,b^2 \pm \cdots}{(2a)^r \pm (r-1)\,(2m)^{r-2}\,b + (r-2)_2\,(2m)^{r-4}\,b^2 \pm \cdots}$$

ein angenäherter Werth.

49) Es seien $m = p^2 - q$, p, q, a, b beliebige, an die Bedingung $2p \geqq q + 1$ gebundene positive und ganze Zahlen; dann convergieren die Brüche $\frac{b}{a}$, $\frac{b_1}{a_1} = \frac{pb + ma}{b + pa}$, $\frac{b_2}{a_2} = \frac{pb_1 + ma_1}{b_1 + pa_1}$, $\frac{b_3}{a_3} = \frac{pb_2 + ma_2}{b_2 + pa_2}$ etc. gegen $\sqrt{m}$.

Die vorstehenden Brüche haben auch dann noch $\sqrt{m}$ zur Grenze, wenn q eine negative Zahl ist, in welchem Falle die Bedingung $2p \geqq q + 1$ wegfällt.

50) Die Brüche $\frac{b}{a}$, $\frac{b_1}{a_1} = \frac{6a - b}{35a - 6b}$, $\frac{b_2}{a_2} = \frac{6a_1 - b_1}{35a_1 - 6b_1}$ etc. convergieren gegen die Zahl $3 - 2\sqrt{2}$ für beliebige positive ungleiche a und b. Unter derselben Voraussetzung ist ferner $5 - 2\sqrt{6}$ der Grenzwerth, welchem sich die Brüche

$$\frac{a}{b}, \frac{a_1}{b_1} = \frac{99b - 10a}{980b - 99a}, \frac{a_2}{b_2} = \frac{99b_1 - 10a_1}{980b_1 - 99a_1}, \text{ etc.}$$

und $7 + 5\sqrt{2}$ der Grenzwerth, dem sich die Brüche

$$\frac{a}{b}, \frac{a_1}{b_1} = \frac{197b + 14a}{14b + a}, \frac{a_2}{b_2} = \frac{197b_1 + 14a_1}{14b_1 + a_1}, \text{ etc.}$$

mit zunehmendem Stellenzeiger (auch für $a = b$) immer mehr nähern.

51) Es ist der Ausdruck $\sqrt{a^2+b}$ in einen stark convergierenden aufsteigenden Kettenbruch zu verwandeln.

52) Es sei

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) = 1 + \frac{(1-q^\alpha)(1-q^\beta)}{(1-q)(1-q^\gamma)} x +$$

$$+ \frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})(1-q^\beta)(1-q^{\beta+1})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})} x^2 + \cdots;$$

man verwandle diese und die Reihen

$$\varphi(-n, \beta, \beta, q, -xq^n),\ \varphi(-g, \beta, \beta, q, -xq^g),\ \varphi(g, \beta, \beta, q -x),$$

in welchen g eine unendlich grosse Zahl bedeutet, nach der allgemeinen (Eulerschen) Methode in Kettenbrüche. Auf gleiche Weise verwandle man in Kettenbrüche die letzten acht der in der 23sten Aufgabe des vorigen Kapitels angegebenen Functionen.

53) Man beweise die Gleichungen:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \left[\frac{x}{1-x}, -\frac{x(1-x)^2}{1-x^2}, -\frac{x^2(1-x)^2}{1-x^3}, -\frac{x^2(1-x^2)^2}{1-x^4}, -\cdots\right]$$

$$b)\ \frac{\sum\limits_{n=1} \frac{1}{x^{n\cdot n}}}{\sum\limits_{n=0} \frac{1}{x^{n\cdot n}}} = \left[\frac{x}{x+1}, -\frac{x}{x^3+1}, -\frac{x^3}{x^5+1}, -\frac{x^5}{x^7+1}, -\frac{x^7}{x^9+1}, -\cdots\right]$$

54) Man transformiere folgende Reihen in Kettenbrüche:

$a)\ 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\cdots$

$b)\ \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} + \frac{a_3}{x^4} + \cdots\cdots$

$c)\ \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\cdots}{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots\cdots}$

55) Es bezeichne $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ die Summe der hypergeometrischen Reihe, und man verwandle die Function $F(\alpha, 1, \gamma, x)$ in einen Kettenbruch von der Form $\left[\frac{1}{1}, -\frac{\varrho_1 x}{1}, -\frac{\varrho_2 x}{1}, -\cdots\cdots\right]$; dann ist der Nenner q_{2m-1} des 2mten Näherungsbruches gleich $F(1-m-\alpha, -m, 2-2m-\gamma, x)$

$$= 1 + \sum_{1}^{m} (-1)^n (m)_n \frac{(\alpha+m-1)_n}{(\gamma+2m-2)_n} x^n\ .$$

und $q_{2m+1} = F(-m-\alpha, -m, 1-2m-\gamma, x) =$

$$= 1 + \sum_{1}^{m} (-1)^n (m)_n \frac{(\alpha+m)_n x^n}{(\gamma+2m-1)_n}$$

56) Bildet man die Näherungsbrüche des Kettenbruches

$$\left[\frac{1}{1}, -\frac{x}{1}, +\frac{x}{2}, -\frac{x}{3}, + \cdots\right] = e^x,$$

so findet man für zwei auf einander folgende Zähler und Nenner die Werthe

$$p_{2m-1} = 1 + \frac{m-1}{2m-1} \cdot \frac{x}{1} + \frac{(m-1)\ (m-2)}{(2m-1)\ (2m-2)} \cdot \frac{x^2}{1.2} + \cdots$$

$$p_{2m} = 1 + \frac{m}{2m} \cdot \frac{x}{1} + \frac{m\ (m-1)}{2m\ (2m-1)} \cdot \frac{x^2}{1.2} + \cdots$$

$$q_{2m-1} = 1 - \frac{(m)_1}{(2m-1)_1} \cdot \frac{x}{1} + \frac{(m)_2}{(2m-1)_2} \cdot \frac{x^2}{1.2} + \cdots$$

$$q_{2m} = 1 - \frac{(m)_1}{(2m)_1} \cdot \frac{x}{1} + \frac{(m)_2}{(2m)_2} \cdot \frac{x^2}{1.2} + \cdots$$

57) Man berechne für den Kettenbruch

$$\left[\frac{x}{1}, \frac{\frac{1.1}{1.2}x}{1}, \cdots\right] = l\,(1+x)$$

die Werthe q_{2m} und q_{2m+1} der Nenner zweier auf einander folgenden Näherungsbrüche.

58) Die in der 52. Aufgabe angegebene Function besitzt die Eigenschaft, das $\varphi(\alpha, \beta+1, \gamma+1, q, x) - \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) =$

$$= \varphi\beta \cdot x \frac{(1-q^\alpha)\ (1-q^{\gamma-\beta})}{(1-q^\gamma)\ (1-q^{\gamma+1})} \varphi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, q, x)$$

ist, man benütze dieselbe, um den Quotienten

$$\frac{\varphi\,(\alpha, \beta+1, \gamma+1, q, x)}{\varphi\,(\alpha, \beta, \gamma, q, x)}$$

in einen Kettenbruch von der Form

$$\left[\frac{1}{1}, -\frac{\varrho_1 x}{1}, -\frac{\varrho_2 x}{1}, -\frac{\varrho_3 x}{1}, - \cdots\right] \text{ zu verwandeln.}$$

Man beweise ferner folgende Gleichungen und transformiere die Quotienten der Functionen φ, welche in den rechten Theilen vorkommen, in Kettenbrüche:

$$\frac{\varphi(\beta+1,\alpha,\gamma,q,x)}{\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)}=\frac{1}{1-q^{\alpha}x\frac{(1-q^{\beta})}{(1-q^{\gamma})}\cdot\frac{\varphi(a+1,\beta+1,\gamma+1,q,x)}{\varphi(\alpha+1,\beta,\gamma,q,x)}}$$

$$\frac{\varphi(\alpha,\beta+1,\gamma,q,x)}{\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)}=\frac{1}{1-q^{\beta}x\frac{(1-q^{\alpha})}{(1-q^{\gamma})}\cdot\frac{\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,q,x)}{\varphi(\alpha+1,\beta,\gamma,q,x)}}$$

$$\frac{\varphi(\alpha-1,\beta+1,\gamma,q,x)}{\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)}=\frac{1}{1+q^{\alpha-1}x\frac{(1-q^{\beta+1-\alpha})}{(1-q^{\gamma})}\cdot\frac{\varphi(\beta+1,\alpha,\gamma+1,q,x)}{\varphi(\beta+1,\alpha-1,\gamma,q,x)}}$$

$$\frac{\varphi(\alpha+1,\beta-1,\gamma,q,x)}{\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)}=\frac{1}{1-q^{\alpha}x\frac{(1-q^{\beta-\alpha-1})}{(1-q^{\gamma})}\cdot\frac{\varphi(\alpha+1,\beta,\gamma+1,q,x)}{\varphi(\alpha+1,\beta-1,\gamma,q,x)}}$$

$$q^{\alpha}\frac{\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,qx)}{\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)}=1-\frac{(1-q^{\alpha})}{1-q^{\alpha}x\frac{(1-q^{\beta})}{(1-q^{\gamma})}\cdot\frac{\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,q,x)}{\varphi(\alpha+1,\beta,\gamma,q,x)}}$$

59) Die in der vorhergehenden Aufgabe aufgestellten allgemeinen Formeln benützе man zur Verwandlung folgender Reihen:

a) $1+\sum_{n=1}\frac{x^n}{(1-q^{\gamma})\dots(1-q^{\gamma+n-1})}$

b) $1+\sum_{n=1}(-1)^n\frac{q^n x^n}{(1-q^{\gamma})\dots(1-q^{\gamma+n-1})}$

c) $1+\sum_{n=1}\frac{x^n z^n}{(1-x)\dots(1-x^n)}$

d) $1+\sum_{n=1}(q^{\alpha}-1)\dots(q^{\alpha+n-1}-1)\frac{x^n}{q^{n\alpha+\frac{n(n-1)}{2}}}$

e) $1+\sum_{n=1}(q^{\alpha}-1)\dots(q^{\alpha+n-1}-1)\frac{x^n}{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}$

f) $\sum_{n=0}q^{n\alpha+\frac{n(n-1)}{2}}x^n$ *g)* $\sum_{n=0}q^{2n\alpha+n(n-2)}.x^n$

h) $\sum_{n=0}\frac{x^n}{q^{n.n}}$ *i)* $\sum_{n=0}q^n x^n$

k) $\sum_{n=0}q^{n\gamma+\frac{n(n+1)}{2}}x^n$ *l)* $1+\sum_{n=1}\frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}z^n}{(1-x)\dots(1-x^n)}$

m) $1 + \sum_{n=1} \frac{(1 - z) \ldots . (1 - z^{2n-1})}{(1 - z^2) \ldots . (1 - z^{2n})}$

n) $\dfrac{1 + \sum_{n=0} \frac{(1 - q^6)\, q^{2n+2}\, x^{2n+2}}{(1 - q^{10+4n})}}{1 + \sum_{n=0} \frac{(1 - q^2)\, q^{2n+2}\, x^{2n+2}}{(1 - q^{6+4n})}}$

o) $\dfrac{\sum_{n=0} (-1)^n q^{2n} x^n}{\sum_{n=0} (-1)^n \frac{(1 - q)}{(1 - q^{2n+1})} q^{2n} x^n}$

p) $\dfrac{1 + \sum_{n=1} \frac{(1 - q^3) \ldots . (1 - q^{2n+1})}{(1 - q^2) \ldots . (1 - q^{2n})} q^n x^n}{1 + \sum_{n=1} \frac{(1 - q) \ldots . (1 - q^{2n-1})}{(1 - q^2) \ldots . (1 - q^{2n})} q^n x^n}$

q) $\dfrac{1}{\sum_{n=0} \frac{2q^n z^n}{1 + q^{2n}}}$

r) $\dfrac{\sum_{n=1} (-1)^{n-1} \frac{(1 + q^2)}{(1 + q^{2n})} q^{2n} z^{n-1}}{\sum_{n=1} (-1)^{n-1} \frac{(1 + q^2)}{(1 + q^{2n})} z^{n-1}}$

s) $\dfrac{1}{\sum_{n=0} \frac{2q^n z^n}{1 + q^n}}$

60) Verwandelt man die Function $\varphi(\alpha, 1, \gamma, q, x)$ in einen Kettenbruch von der Form $\left[\frac{1}{1}, -\frac{a_1 x}{1}, -\frac{a_2 x}{1}, - \ldots .\right]$ und bezeichnet man die Nenner der Näherungsbrüche durch den Buchstaben Q, so ist

$$Q_{2n-1} = \varphi(-n, 1 - \alpha - n, 2 - \gamma - 2n, q, q^{\alpha+1-\gamma} x) \text{ und}$$
$$Q_{2n} = \varphi(-n, -\alpha - n, 1 - \gamma - 2n, q, q^{\alpha+1-\gamma} x).$$

Verwandelt man ferner den Quotienten

$$\frac{\varphi(\alpha, \beta + 1, \alpha + 1, q, x)}{\varphi(1, \beta, 1, q, x)}$$

in einen Kettenbruch von der angegebenen Form, so ist

$$Q_{2n-1} = \varphi(-n, 1 + \beta - \alpha - n, 1 - \alpha - 2n, q, x) \text{ und}$$
$$Q_{2n} = \varphi(-n, \beta - \alpha - n, -\alpha - 2n, q, x).$$

Folgende unendliche Producte sind in Kettenbrüche zu verwandeln:

61) $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots\cdots$

62) $\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{18}{17} \cdot \frac{18}{19} \cdots\cdots$

63) $\sqrt{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{11} \cdots\cdots$

64) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{12}{12} \cdots\cdots$

65) $(1 - x)\,(1 - x^3)\,(1 - x^5)\,(1 - x^7) \cdots\cdots$

66) $\left(1 - \frac{x}{p}\right)\left(1 - \frac{x}{p^2}\right)\left(1 - \frac{x}{p^3}\right)\left(1 - \frac{x}{p^4}\right) \cdots\cdots$

67) $(1 + qx)\,(1 + q^2x)\,(1 + q^3x)\,(1 + q^4x) \cdots\cdots$

68) $\frac{(1 - x)\,(1 - px)\,(1 - p^2x)\,(1 - p^3x) \cdots\cdots}{(1 - y)\,(1 - py)\,(1 - p^2y)\,(1 - p^3y) \cdots\cdots}$

Folgende Kettenbrüche sind in unendliche Producte zu verwandeln:

69) $1 + \left[\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \cdots\right]$

70) $\left[\frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{7} \cdots\right]$

71) $1 + \left[\frac{1^2}{2}, \frac{3^2}{2}, \frac{5^2}{2}, \cdots\right]$

72) $\left[\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3^2}{7}, \frac{4^4}{9}, \cdots\right]$

73) Man stelle die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystemes als einen Quotienten zweier Kettenbrüche dar, und verwandle letztere in unendliche Producte.

Ueber Kettenbrüche vergl. Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, II. Bd., p. 264. Serret, Handbuch der höh. Algebra d. v. Wertheim, I. Bd., p. 7. Seidel, Abhandlungen der bair. Akademie der Wiss., VII. Bd. (1855). Moebius, Crelle Journal, VI (1830). Stern, Crelle Journal, Bd. 37.

Anhang.

Diverse Probleme.

1) Ist
$$u_{n+1} - u^2_n + u_n - 1 = 0$$
so ist
$$\sum \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_0 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$$
Educ. Tim. 37, p. 42.

2) Ist
$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$
und
$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots$$
die daraus abgeleitete Reihe, so wird
$$\frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.3} + \frac{3}{2.5} + \cdots \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}\, u_{n+3}} = 2 - \frac{u_{n+4}}{u_{n+2}\, u_{n+3}}$$
Nouvell. Ann. XIX, p. 467. II. Ser.

3) Es ist
$$\operatorname{tg} x \sqrt{\operatorname{tg} 2x} \sqrt[4]{\operatorname{tg} 4x} \sqrt[8]{\operatorname{tg} 8x} \cdots = 4 \sin^2 x$$

Grunerts Archiv LIX, p. 98. Für endliche Anzahl von Factoren: Herschel, Aufgabensammlung aus der endlichen Summen- und Differenzenrechnung d. v. Schnuse, p. 57.

4) Es ist
$$1 - \frac{2^2 n^2}{2} + \frac{2^4 n^2 (n^2 - 1)}{1.2.3.4} - \frac{2^6 n^2 (n^2 - 1^2)(n^2 - 2^2)}{1.2.3.4.5.6} + \cdots\cdots$$
gleich ± 1, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Nouvell. An. XV, p. 189. II. Ser.

5) Ist
$$F(x) = 1 + \frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} + \frac{x^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots$$
$$f(x) = \frac{1}{n} - \frac{x}{1.(n+1)} - \frac{x^2}{1.2(n+2)} - \frac{x^3}{1.2.3(n+3)} - \cdots$$

so wird

a) $F(x) = f(x) \cdot e^x$

b) $F(x)\,F(-x) = 1 + \frac{x^2 n}{(n+1)(n+2)} \frac{1}{n+1} +$

$$+ \frac{x^4 n}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \frac{1}{n+2} + \cdots$$

Satz von Hermite. Educ. Tim. XXIX, p. 76 und p. 109.

6) Es ist

$$1 - \frac{1}{m} x + \frac{1.2}{m(m-1)} x^2 - \frac{1.2.3}{m(m-1)(m-2)} x^3 + \cdots\cdot$$

$$= (m+1) \left\{ \frac{1}{m+1} \frac{1}{1-x} - \frac{1}{m} \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{m-1} \frac{x^2}{(1-x)^3} + \cdots \right\}$$

Messenger, II. Ser. IX, p. 166.

7) Ist

$$u_n = x^n + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4} x^{n-4} + \cdots$$

so ist auch

$$x_n = u_n - \frac{n(n-1)}{2} u_{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4} u_{n-4} - \cdots$$

Educ. Tim. XXXII, p. 87.

8) Das Product von

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+2} \cdot \frac{1}{2} x + \frac{1}{a+4} \cdot \frac{1.3}{2.4} x^2 + \frac{1}{a+6} \cdot \frac{1.3.5}{2.4.6} x^3 + \cdots$$

und

$$1 + \frac{1}{2} x + \frac{1.3}{2.4} x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6} x^3 + \cdots\cdot$$

ist

$$\frac{1}{a} \left\{ 1 + \frac{a+1}{a+2} x + \frac{(a+1)(a+3)}{(a+2)(a+4)} x^2 + \frac{(a+1)(a+2)(a+3)}{(a+2)(a+4)(a+5)} x^3 + \cdots \right\}$$

Nouv. Ann. II. Ser. Tom. X, p. 330.

9) Beweise, dass die Summe von x Gliedern der Reihe

$$1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 6 + \cdots\cdot\cdot$$

gleich ist

$$\frac{x(x+1)(x+2)(3x+13)}{12}$$

10) Desgleichen von

$$1 + 2p + 3p^2 + 4p^3 + \cdots\cdot$$

gleich

$$\frac{1 - p^x(1 + x - xp)}{(1 - p)^2}$$

und wenn die Reihe ins Unendliche fortgesetzt und $p < 1$ angenommen wird, gleich

$$\frac{1}{(1 - p)^2}$$

11) Desgleichen von

$$\text{arctg}\,\frac{1}{2.1^2} + \text{arctg}\,\frac{1}{2.2^2} + \text{arctg}\,\frac{1}{2.3^2} + \cdots\cdots$$

für endliches x

$$= \frac{\pi}{4} - \text{arctg}\,\frac{1}{2x + 1}$$

für unendliches

$$= \frac{\pi}{4}$$

Euler, Com. Acad. Petrop. IX, p. 234 (1737), Spence logarithmic Transcendens.

12) Von den vier gleichweit abstehenden Werthen einer Function

$$v_0 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3$$

sind drei, nämlich

$$v_0 \quad v_2 \quad v_3$$

gegeben, es ist v_2 zu bestimmen.

Anl. Setze die dritte Differenz $= 0$, also

$$\triangle^3 v_0 = v_3 - 3v_2 + 3v_1 - v_0 = 0,$$

man findet

$$v_2 = \frac{v_3 + 3v_1 - v_0}{3}$$

13) Es seien gegeben

$$\log 510 = 2\cdot70757018$$
$$\log 511 = 2\cdot70842090$$
$$\log 513 = 2\cdot71011737$$
$$\log 514 = 2\cdot71096312$$

Man sucht log 512.

Setzt man

$$\triangle^4 v_0 = v_4 - 4v_3 + 6v_2 - 4v_1 + v_0 = 0$$

so wird

$$v_2 = \frac{4(v_1 + v_3) - (v_0 + v_4)}{6} = 2 \cdot 70926996$$

genau wie in den Tafeln.

14) Drei Werthe einer Function v_0 v_1 v_3 sind gegeben, es ist ein Werth v_n einzuschalten, man findet

$$v_n = v_0 - \frac{v_3 - 9v_1 + 8v_0}{6} \cdot n + \frac{v_3 - 3v_1 + 2v_0}{6} n^2$$

15) Man zeige, dass sich die Reihe

$$a_1 x - a_2 x^2 + a_3 x^3 - \cdots$$

in folgende umformen lässt:

$$\frac{a_1 x}{1+x} - \triangle a_1 \frac{x^2}{(1+x)^2} + \triangle^2 a_1 \frac{x^3}{(1+x)^3} - \cdots$$

Euler, Inst. Calc. diss. Tom. II, Cap. I.

16) Beweise die Gleichheit:

$$1 + \frac{a}{1} x + \frac{a(a-1)}{1.2} x^2 + \cdots \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{1.2.3\ldots.n} x^n$$

$$= (1+x)^n \left\{ 1 + \frac{a-n}{1} \left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{(a-n+1)(a-n)}{1.2} \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \cdots + \frac{(a-1)(a-2)..(a-n)}{1.2.3\ldots n} \left(\frac{x}{1+x}\right)^n \right\}$$

Laplace, Théorie analyt. des probab., p. 151.

17) Sei p_n/q_n der n^{te} Näherungswerth des Kettenbruches

$$[a_1\ a_1\ a_1 \cdots]$$

so ist

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a^{n-1} + \binom{n-2}{1} a^{n-3} + \binom{n-3}{2} a^{n-5} + \cdots}{a^n + \binom{n-1}{1} a^{n-2} + \binom{n-2}{2} a^{n-4} + \cdots}$$

18) Um die Reihe

$$S = 1 + \frac{a}{z} + \frac{a^2}{2!\, z(z+1)} + \frac{a^3}{3!\, z(z+1)(z+2)} + \cdots$$

in einen Kettenbruch zu verwandeln, setze man (nach Legendre)

$$S = \varphi(z)$$

und leite ab die Relation

$$\varphi(z) - \varphi(z+1) = \frac{a}{z(z+1)}\,\varphi(z+2)$$

Setzt man sodann

$$\frac{a}{z} \cdot \frac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)} = \psi(z)$$

so wird

$$\psi(z) = \frac{a}{z + \psi(z+1)}$$

also

$$\psi(z) = \left[\frac{a}{z}, \frac{a}{z+1}, \frac{a}{z+2}, \frac{a}{z+3}, \cdots\cdots\right]$$

Es ist diese angedeutete Ableitung ganz durchzuführen.

19) Beweise, dass die Reihen,

deren allgemeines Glied ist:	das summatorische Glied:
$\frac{x}{1}$	$\frac{x(x+1)}{1.2}$
$\frac{x(x+1)}{1.2}$	$\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}$
$\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}$	$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1.2.3.4}$
$\frac{1.2}{x(x+1)}$	$\frac{2}{1} - \frac{2}{x+1}$
$\frac{1.2.3}{x(x+1)(x+2)}$	$\frac{3}{2} - \frac{1.3}{(x+1)(x+2)}$

haben.

20) Man entwickele die Reihe

$$(\arcsin x)^3 = x^3 + \frac{3!}{5!}\,3^2\left(1 + \frac{1}{3^2}\right)x^5 + \frac{3!}{7!}\,3^2 \cdot 5^2 .$$
$$\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2}\right)x^7 + \cdots\cdot$$

Anl.: Beachte, dass

$$\arcsin x = \frac{1}{2}\arcsin 2x\sqrt{1 - x^2}.$$

Erläuterungen und Resultate zu den vorhergehenden Aufgaben.

Zu I.

1*a*) $\binom{r+n}{n}$ 1*b*) $\binom{r+n}{n} - \binom{r+n-p}{n}$

1*c*) $\binom{r+n}{n} - \binom{r+n-p}{n} - \binom{r+n-q}{n} - \binom{r+n-p-q}{n}$

2) $a = -3\frac{x+y}{z}, = -3\frac{x+z}{y}, = -3\frac{z+y}{x}$

3) $p = 2q$, q eine ungerade Zahl.

6) $m = 6n \pm 1$, n positiv und ganz.

10) Man findet,

$$\begin{aligned} ab - 9e &= -\Sigma x_1 (x_1 x_2 - 2x_2 x_3 + x_3 x_1) \\ a^3 c - b^3 &= \Sigma (x_1^2 - x_2 x_3) \\ b^2 - 3ac &= \Sigma x_2 x_3 (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \\ 2a^3 - 9ab + 27e &= \Sigma (x_2 - 2x_1 + x_3) \end{aligned}$$

wobei sich die Summen auf cyklische Vertauschung der Indices 1, 2, 3 beziehen.

13) Bezeichnet C_q^p die Summe der Producte von je q der p Grössen $x_1, x_2, \ldots x_p$, so ist der vorgelegte Ausdruck $= C_1^n . C_2^n - C_3^n$. Vertauscht man in dem Ausdrucke x_1 mit x_n, x_2 mit x_{n-1}, x_3 mit x_{n-2} etc. ... x_{n-1} mit x_2 und x_n mit x_1, so erhält man einen neuen Ausdruck, welcher in Verbindung mit dem früheren die von Waring angegebene Identität liefert.

18) $\frac{n!}{(n-m)!}$ 19) $(n)_m \, \frac{m!}{\alpha'! \, \beta'! \, \gamma'! \ldots \mu'!}$

29) bis 36). Sämmtliche Ausdrücke sind in der allgemeinen Form $\sqrt{m + nx + px^2}$ enthalten. Um diesen letzteren Ausdruck rational durch eine Variable z auszudrücken, setze man $\sqrt{m + nx + px^2} = \sqrt{m} + xz$, wenn $m > 0$, oder $= z + x\sqrt{p}$, wenn $p > 0$ oder endlich $= z(x - w_1)$, wenn w_1 eine der als reell vorausgesetzten Wurzeln der Gleichung $x^2 + \frac{n}{p}x + \frac{m}{p} = 0$ bezeichnet. Es ist dann im ersten Falle $x = \frac{2z\sqrt{m} - n}{p - z^2}$ und $\sqrt{m + nx + px^2} = \frac{z^2\sqrt{m} - nz + p\sqrt{m}}{p - z^2}$, im zweiten Falle: $x = \frac{m - z^2}{2z\sqrt{p} - n}$ und $\sqrt{m + nx + px^2} = \frac{z^2\sqrt{p} - nz + m\sqrt{p}}{2z\sqrt{p} - n}$

und im dritten Falle: $x = \frac{w_2 p - w_1 z^2}{p - z^2}$ und $\sqrt{m + nx + px^2} = \frac{p(w_2 - w_1) z}{p - z^2}$

Man versuche aber auch die vorliegenden Functionen rational zu machen, ohne sie erst auf die Form des obigen Ausdruckes zu bringen.

39) bis 49). Wenn y mit x durch eine Gleichung von der Form $A_0 y^n + A_1 y^{n-1} x + A_2 y^{n-2} x^2 + \ldots + A_n x^n = x^{n-m-1}(a_0 y^m + a_1 y^{m-1} x + \ldots + a_m x_m)$ verbunden ist, in welcher n und m positive ganze Zahlen bezeichnen, so lässt sich sowohl y als x durch eine neue Veränderliche z rational ausdrücken. Denn setzt man $y = xz$, so liefert die obige Gleichung

$$x = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots\ldots + a_m}{A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots\ldots + A_n}$$

$$\text{und daher } y = z\left(\frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots\ldots + a_m}{A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots\ldots + A_n}\right)$$

Mittelst derselben Substitution lassen sich die beiden Variablen x und y als explicite — wenn auch im Allgemeinen nicht rationale — Functionen von z darstellen, wenn die zwischen x und y bestehende Gleichung entweder die Form hat: $A_0 y^n + A_1 y^{n-1} x + \ldots + A_n x^n = a_0 y^m + a_1 y^{m-1} x + \ldots + a_m x^m$ oder wenn in derselben zwar dreierlei Dimensionen vorkommen, jedoch der Art, dass die höchste die mittlere um ebensoviele Einheiten übersteigt, als diese die niedrigste.

Zu III.

45) Ist $b > a$, so findet man mit Hilfe goniom. Functionen

$$\lim a_n = \lim b_n = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{\arccos \frac{a}{b}}$$

Ist $a < b$, so benütze man folgende Identitäten:

$$\frac{a + b}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2} \cdot \frac{A^{\frac{1}{2}} + A^{-\frac{1}{2}}}{A^{\frac{1}{2}} - A^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\text{und } b = \frac{2\sqrt{a^2 - b^2}}{\left(A^{\frac{1}{2}} + A^{-\frac{1}{2}}\right)\left(A^{\frac{1}{2}} - A^{-\frac{1}{2}}\right)}, \text{ worin } A = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

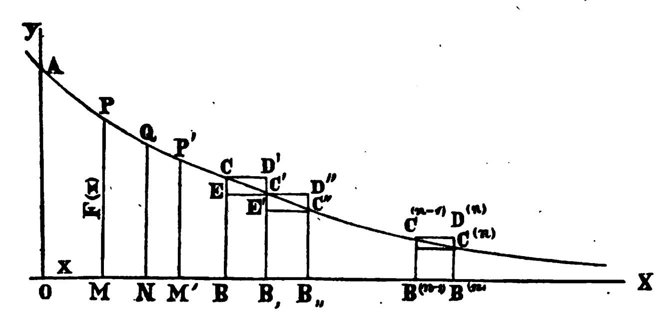
$$\text{und man findet } \lim a_n = \lim b_n = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\log\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)}$$

48) $\lim A_n = \lim 2 . \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \ldots\ldots = \pi$

49) $\lim A_n = \lim 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2} + \ldots\ldots\ldots}} = \pi$

(Welcher geometrischen Deutung ist A_n fähig?)

50) Die Richtigkeit dieses Satzes ist leicht zu beweisen, wenn man F (x) die über die Abscisse x = OM stehende Fläche AOMP bedeuten lässt. Ist nämlich $MM' = \delta$, so ist zunächst $F(x + \delta) - F(x)$ = Fläche MM'P'P, welche man sich als ein Rechteck denken kann, das δ zur



Grundlinie und eine zwischen MP und M'P' liegende Ordinate NQ zur Höhe hat. Hieraus folgt: $\frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta} = NQ$ und $\lim \frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta}$ $= \lim NQ = MP$, als geometrische Bedeutung von f(x). Ist nun OB = a, $BB' = B'B'' = B''B''' = \ldots\ldots\ldots = B^{(n-1)}B^{(n)} = 1$, so ist offenbar die Fläche $BB^{(n)}C^{(n)}C$ kleiner als die Summe der Rechtecke BD', B'D'', ... $B^{(n-1)}D^{(n)}$; dagegen grösser als die Summe der Rechtecke BC', B'C'', ... $B^{(n-1)}C^{(n)}$, mithin:

$F(a+n) - F(a) < f(a) + f(a+1) \ldots\ldots + f(a+n-1)$ und

$F(a+n) - F(a) > f(a+1) + f(a+2) + \ldots\ldots + f(a+n)$, oder auch:

$F(a+n) - F(a) + f(a) - f(a+n) > f(a) + f(a+1) + \ldots f(a+n-1)$.

51) $F(a) = la$ 52) $F(a) = lla$ 53) Man setze $a^2 = b$ und $F(b) = 2\sqrt{b}$. 54) *a*) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$, *b*) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}$

Zu VI.

32) $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

33) $S_n = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+n+1}$

34) $u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2$, $S_n = 4 - \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2$

35) bis 39). Ist das allgemeine Glied einer Reihe ein rationaler Bruch, dessen Nenner dem Producte der $r+1$ Factoren $n + a$, $n + a + s_1$, ...

$n + a + s_r$ gleich und dessen Zähler in Bezug auf n höchstens von der $r - 1^{sten}$ Ordnung ist, und sind sämmtliche s positive ganze Zahlen aufsteigend geordnet, so lässt sich das summatorische Glied der Reihe auf folgende Weise finden. Man setze

$$u_n = \frac{A_1}{(n+a)(n+a+1)} + \ldots + \frac{A_{s_1}}{(n+a+s_1-1)(n+a+s_1)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{A_{s_{r-1}}}{(n+a+s_{r-1}-1)(n+a+s_{r-1})} + \ldots + \frac{A_{s_r}}{(n+a+s_r-1)(n+a+s_r)},$$

ordne diese Gleichung nach den Potenzen von n und setze sämmtliche Coefficienten $= 0$, so erhält man die nöthige Anzahl linealer Gleichungen zur unzweideutigen Bestimmung der Grössen $A_1, A_2 \ldots\ldots A_{s_r}$.

Es ist nun $\sum\limits_{1}^{n} u_n = \sum\limits_{m=1}^{s_r} \sum\limits_{n=1}^{n} \frac{A_m}{(n+a+m-1)(n+a+m)}$ und

$$\sum_{n=1}^{n} \frac{A_m}{(n+a+m-1)(n+a+m)} = A_m \left(\frac{1}{a+m} - \frac{1}{n+a+m}\right)$$

Ist diese Methode noch anwendbar, wenn im Nenner von u_n gleiche Factoren vorkommen?

40) $S_n = \frac{n(n+1)}{2(4a^2+1)(4a^2+(2n+1)^2}$ 41) $S_n = \frac{n^2}{a^2(a^2+n^2)}$

42) $S_n = \frac{\frac{1}{2} n(n+1)}{(na^2+2n^2+2n+1)^2 - 4n^2(n+1)^2}$

43) $S_n = \frac{(4a^2-2n-1)n}{(4a^2+2n^2+2n+1)^2 - 4n^2(n+1)^2}$

44) $S_n = \frac{b}{1-q}\left[a(1-q^n) - ndq^n + dq\frac{(1-q^n)}{1-q}\right]$

46) $\frac{1-nx^n}{1-x} + x\frac{1-x^{n-1}}{(1-x)^2} + \frac{1-(2n-1)\left(\frac{x}{2}\right)^n}{1-\frac{x}{2}} + \frac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}}{\left(1-\frac{x}{2}\right)^2}$

47) Es ist $1 + \frac{2.3}{1.2}x + \frac{3.4}{1.2}x^2 + \ldots\ldots + \frac{n(n+1)}{1.2}x^{n-1} =$

$[1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}] + x[1 + 2x + \ldots (n-1)x^{n-2}] +$
$+ x^2[1 + 2x + \ldots + (n-2)x^{n-3}] + \ldots + x^{n-1}$
$= \frac{1}{(1-x)^3} - \frac{x^n}{(1-x)^3} - \frac{n}{1} \cdot \frac{x^n}{(1-x)^2} - \frac{n(n+1)}{1.2} \cdot \frac{x^n}{1-x}$

48) $1 + \frac{2.3.4}{1.2.3}x + \frac{3.4.5}{1.2.3}x^2 + \ldots\ldots + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}x^{n-1} =$

$$= \left[1 + \frac{2.3}{1.2}x + \frac{3.4}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{n(n+1)}{1.2}x^{n-1}\right] +$$

$$+ x\left[1 + \frac{2.3}{1.2}x + \ldots + \frac{(n-1)n}{1.2}x^{n-2}\right] + x^2\left[1 + \ldots\right] + \ldots + x^{n-1}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^4} - \frac{x^n}{(1-x)^n} - \frac{n x^n}{(1-x)^3} - \frac{n(n+1)}{1.2} \cdot \frac{x^n}{(1-x)^2} -$$

$$- \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} \cdot \frac{x^n}{1-x}$$

49) $S = \frac{1}{(1-x)^k} - \frac{x^n}{(1-x)^k} - \frac{n}{1} \cdot \frac{x^n}{(1-x)^{k-1}} -$

$$- \frac{n(n+1)}{1.2} \cdot \frac{x^n}{(1-x)^{k-2}} - \ldots - \frac{n(n+1)\ldots(n+k-2)}{1.2.3\ \ldots\ (k-1)} \cdot \frac{x^n}{1-x}$$

50) $S = a^m \frac{x^{mn} - 1}{x^m - 1}$ 51) $S_n = \frac{1}{2}\cot x - \frac{\cos(2n+1)x}{2\sin x}$

52) $S_n = \frac{1}{4}\left\{\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-y)}{\sin\frac{x-y}{2}} + \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x+y)}{\sin\left(\frac{1+y}{2}\right)} - 2\right\}$

53) $S_n = \operatorname{tg} 2^n x - \operatorname{tg} x$ 54) $S_n = \frac{2n-1}{4} + \frac{\sin(2n+1)x}{4\sin x}$

55) con. 56) con. 57) div. 58) div. 59) con. 60) 61) conv. 62) 63) div. 64) con. 65) con. oder div., je nachdem $a \lesseqgtr c$. 66) con. 67) div. 68) con. für $a > 1$ div. für $a \leqq 1$. 69) für jedes x con. 70) div. 71) bis 77) div. 78) con. für $m > 0$ div. für $m \leqq 0$. 79)—81) div. 82) con. 83) con. 84) div. 85)—89) con. 90) 91) con. 92) con, wenn $a + b > 1$. 93) con. 94) con. für $m + p + 1 > 0$. 95) con. für $a > 1$. 96) 97) con. 98) div. 99) con. 100) con., wenn $x + 1 > m$. 101) div. 102) div. 103) con. 104) 105) div. 106) div. 107) con. 108) div. 109—114) con. 115) div. 116) 117) div. 118) con., wenn $x > 0$. 119) div. 120) con. für $\cos x > 0$. 121) 122) con. 123) div. 124) con. 125) 126) con. 127) con. 128) div.

NB. Man benütze die Ungleichheiten

$$x - \frac{x^3}{4} < \sin x < x$$

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1$$

die leicht abzuleiten sind aus

$$\sin x = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \left\{1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right\}$$

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

128) con. 130) con. 131) con. für $1 < x < +1$. 132) con. 133) div. 134) div.

190) Es ist $u_n = \frac{1.6}{2.5} \cdot \frac{2.7}{3.6} \cdot \frac{3.8}{4.7} \cdots \frac{n(n+5)}{(n+1)(n+4)} = \frac{n+5}{5(n+1)}$,

daher $S_{2n} = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)2n}\right)$ und

$$S_{2n+1} = 1 - \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \ldots + \frac{1}{2n(2n+1)}\right).$$

Die eingeklammerten Reihen sind convergent, demnach ist sowohl *lim* S_{2n} als auch *lim* S_{2n+1} eine endliche Grösse und die Differenz beider Grenzwerthe ist *lim* $u_{2n} =$ *lim* $\frac{2n+5}{5(2n+1)} = \frac{1}{5}$.

202) Es sei $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots$

und $s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots\ldots$, dann lässt sich S als Grenzwerth von

$$S_n = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \ldots \left(\frac{1}{6n-5} + \frac{1}{6n-5} + \frac{1}{6n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right)$$

und s als Grenzwerth von

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \ldots \left(\frac{1}{6n-5} - \frac{1}{6n-4} + \frac{1}{6n-3} - \frac{1}{6n-2} + \frac{1}{6n-1} - \frac{1}{6n}\right)$$

betrachten. Die Differenz beider Gleichungen giebt

$$S_n - s_n = \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{12} - \frac{1}{6}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{6n+4} + \frac{1}{6n-2} + \frac{1}{6n} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) = \frac{1}{4n+2} + \frac{1}{4n+4} + \ldots + \frac{1}{6n-4}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \ldots + \frac{1}{3n-2}\right)$$

woraus folgt, dass $S_n - s_n$ sich einer zwischen $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{4}$ liegenden Grenze nähere, und dass demnach die abgeleitete Reihe nicht dieselbe Summe wie die ursprüngliche besitze.

206) Sämmtliche Glieder der Reihe als positiv vorausgesetzt, ist

$$l(u_0 + \ldots + u_n) - l(u_0 + \ldots + u_{n-1}) < \frac{u_n}{u_0 + \ldots + u_{n-1}}, \text{ dagegen}$$

$$l(u_0 + \ldots + u_n) - l(u_0 + \ldots + u_{n-1}) =$$

$$= -l\left(1 - \frac{u_n}{u_0 + \ldots + u_n}\right) > \frac{u_n}{u_0 + \ldots + u_n} \ldots\ldots \text{etc.}$$

208) Man überzeugt sich leicht, dass

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{k-1} < (k-1)\, u_1, \text{ dagegen} > \frac{k-1}{k} \cdot k u_k$$

$$u_k + u_{k+1} + \ldots + u_{k^2-1} < (k-1)\, k u_k \quad \text{„} \quad > \frac{k-1}{k} \cdot k^2 u_{k^2}$$

$$u_{k^2} + u_{k^2+1} + \ldots + u_{k^3-1} < (k-1)\, k^2 u_{k^2} \quad \text{„} \quad > \frac{k-1}{k} \cdot k^3 u_{k^3}$$

und daher $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots < (k-1)(u_1 + k u_k + k^2 u_{k^2} + \ldots\ldots)$

$$> \frac{k-1}{k}(k u_k + k^2 u_{k^2} + \ldots\ldots) \text{ etc.}$$

Für $k = 2$ erhält man als speciellen Fall das auf pag. 30 angegebene Theorem.

209) Aus $\lim \left(\frac{l\left(\frac{1}{u_n}\right)}{n}\right) \lesseqgtr 0$ folgt $\lim u_n^{\frac{1}{n}} = g \lesseqgtr 1$. Behält man das obere Zeichen bei, so wird, von einem gewissen Werthe des n an, bis ins Unendliche $u_n^{\frac{1}{n}}$ kleiner sein, als eine zwischen g und 1 liegende Zahl α, also $u_n^{\frac{1}{n}} < \alpha$, $u_{n+1}^{\frac{1}{n+1}} < \alpha$, $u_{n+2}^{\frac{1}{n+2}} < \alpha$ etc., daher auch $u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots < \alpha^n + \alpha^{n+1} + \alpha^{n+2} + \ldots\ldots$ und die zu untersuchende Reihe convergieren. Bricht man die Reihe mit dem Gliede u_{n-1} ab, so ist der begangene Fehler kleiner als $\alpha^n + \alpha^{n+1} + \alpha^{n+2} + \ldots$ $= \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$. Ist $g > 1$, so ersieht man leicht, dass, von einem gewissen Werthe des n an, ohne Unterbrechung die Glieder der Reihe über den entsprechenden einer divergenten geometrischen Progression liegen, und dass desshalb die vorgelegte Reihe selbst divergiert. Das Kennzeichen entscheidet nicht, wenn $g = 1$, also $\lim \left(\frac{l\left(\frac{1}{u_n}\right)}{n}\right) = 0$ ist. In diesem

Falle wende man die oben entwickelte Regel auf die Reihe $u_1 + vu_v + v^2u_{v^2} + v^3u_{v^3} + \ldots$ an, welche (nach 208) mit $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ gleichzeitig convergiert oder divergiert, wodurch man als zu betrachtenden Grenzwerth findet: $\lim \left(\frac{l\left(\frac{1}{v^m u_{v^m}}\right)}{m}\right)$. Dieser Ausdruck übergeht für $v_m = n$ in $\lim \left(\frac{l\left(\frac{1}{n u_n}\right)}{l n}\right) . l v$ und ist demnach mit $\lim \left(\frac{l\left(\frac{1}{n u_n}\right)}{l n}\right)$ übereinstimmend positiv oder negativ; also convergiert die ursprüngliche Reihe, wenn $A_2 = \lim \left(\frac{l\left(\frac{1}{n u_n}\right)}{l n_n}\right) > 0$ und divergiert, wenn $A_2 < 0$ ist.

Wenn $A_2 = 0$, so bilde man den Ausdruck $\frac{l\left(\frac{1}{n u_n}\right)}{l n}$ für die Reihe $u_1 + vu_v + v^2u_{v^2} + \ldots$, indem man $v^m = n$ setzt. Man findet ohne Mühe, dass derselbe mit $\frac{l\left(\frac{1}{n l n . u_n}\right)}{l l n}$ sich einer und derselben Grenze nähere, und dass also die Reihe convergiert oder divergiert, je nachdem diese Grenze grösser oder kleiner als 0 ist. Wie man zu verfahren habe, wenn $A_3 = \lim \left(\frac{l\left(\frac{1}{n l n u_n}\right)}{l l n}\right) = 0$, ergiebt sich aus dem Vorhergehenden von selbst.

210) Wenn $\lim n u_n$ nicht Null ist, so kann auch $\lim (u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots)$ nicht Null sein, und wenn $\lim n^h u_n$ endlich ist, so sind, von einem gewissen Werthe des n an, die Glieder der zu untersuchenden Reihe kleiner, als jene der convergenten Reihe $\frac{g}{u^h} + \frac{g}{(n+1)^h} + \frac{g}{(n+2)^h} + \ldots$ (g eine beliebig grosse, aber endliche Zahl).

211) Durch Vergleichung mit Reihen, deren allgemeine Glieder beziehungsweise sind:

$$\frac{1}{n\,(l\,n)^h} \text{ und } \frac{1}{n\,l\,n}$$
$$\frac{1}{n\,l\,n\,(l_2\,n)^h} \text{ und } \frac{1}{n\,l n\,l_2\,n} \text{ etc.}$$

und welche bezüglich ihrer Convergenz oder Divergenz mittelst des in 208) angegebenen Theorems geprüft werden können, zu beweisen.

212) Es sei $lim \frac{\log_r n}{\log_r (n+1) - \log_r n} \cdot \alpha_r = g > 1$, dann muss, von einem gewissen Werthe des Stellenzeigers an, ohne Unterbrechung $\frac{\log_r n \cdot \alpha_r}{\log_r (n+1) - \log_r n}$ grösser sein, als eine zwischen g und 1 liegende Zahl h, welche man als Grenzwerth des Ausdruckes $\frac{(1+\delta)^h - 1}{\delta}$ (wobei $\delta = \frac{\log_r (n+1) - \log_r n}{\log_r n}$) für $n = \infty$ ansehen kann, hieraus folgt aber $1 + \alpha_r > \left[\frac{\log_r n}{\log_r (n+1)}\right]^h$ und ferner

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right) \frac{\log(n+1)}{\log n} \cdots\cdots \frac{\log_{r-1}(n+1)}{\log_{r-1}(n)} \left[\frac{\log_r (n+1)}{\log_r n}\right]^h}$$

d. h. $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ist kleiner als der Quotient der zwei aufeinander folgenden Glieder $\frac{1}{n \log n \ldots. (\log_r n)^h}$ und $\frac{1}{(n+1)\log(n+1) \ldots. (\log_r (n+1))^h}$ einer convergierenden Reihe; die zu untersuchende Reihe ist demnach selbst convergent. Auf ähnliche Weise beweiset man, dass die zu untersuchende Reihe für $g < 1$ und auch $g = 1$ divergiert, wenn in diesem letzteren Falle der Ausdruck seinen Grenzwerth g durch Zunahme erreicht*).

213) Wir setzen die Gleichung 1) $1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\,l n} + \ldots + \frac{k}{n\,l n \ldots l_r n} + \frac{1}{\delta n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right) \frac{l(n+1)}{l n} \ldots \left[\frac{l_r n (n+1)}{l_r n}\right]^k$, in welcher k eine positive Zahl bedeutet und δ nicht unendlich klein wird für $n = \infty$, vorläufig als bewiesen voraus, und nehmen an, dass $g > 1$ der Grenzwerth des Ausdruckes $n \cdot l n \ldots. l_r n \alpha_r$ sei. In diesem Falle wähle man eine positive Zahl k so, dass $g > k + \frac{l n\, l_2 n \ldots l_r n}{\delta n^2}$, was immer möglich ist, da das zweite Glied des rechten Theiles die Grenze Null besitzt. Für hinreichend grosse n wird nun ohne Unterbrechung $n\, l n\, l_2 n \ldots. l_r n \alpha_r > k + \frac{l n\, l_2 n \ldots l_r n}{\delta n}$ also $\alpha_r > \frac{k}{n\, l n\, l_2 n \ldots. l_r n} + \frac{1}{\delta n^2}$ und $1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\, l n} + \ldots. \frac{1}{n\, l n\, l_2 n \ldots l_{r-1} n}$

*) Selbstverständlich wird man bei einer Anwendung dieser Regel auf Beispiele, r successive die Werthe 1, 2, 3 .... annehmen lassen, und zu einem höheren Werthe erst dann schreiten, wenn der niedere zu einem über die Convergenz oder Divergenz nicht entscheidenden Ausdruck führt.

$$+\alpha_r > 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\,l n} + \ldots + \frac{1}{n\,l n \ldots l_{r-1} n} + \frac{k}{n\,l n\, l_2 n \ldots l_r n} + \frac{1}{\delta n^2}$$

Mit Rücksicht auf 1) hat man nun:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\,l n} + \ldots + \frac{1}{n l n \ldots l_{r-1} n} + \alpha_r} < \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)\frac{l(n+1)}{l n} \cdot \frac{l_2(n+1)}{l_2 n} \cdots \left(\frac{l_r(n+1)}{l_r n}\right)^k}$$

d. h. der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ der zu untersuchenden Reihe ist kleiner als der entsprechende Quotient einer convergenten Hilfsreihe, wodurch die Convergenz der Reihe nachgewiesen ist. Ebenso leicht überzeugt man sich von der Divergenz der Reihe für den Fall, dass der Grenzwerth g kleiner als 1 ist. Es erübrigt nur noch, die Ableitung der Gleichung 1) wenigstens anzudeuten. Zu diesem Zwecke setzen wir den Ausdruck $\frac{l_2(n+1)}{l_2 n}$ $= 1 + \frac{1}{y}$, woraus $\left(\frac{l(n+1)}{l(n)}\right)^y = l\, n$ folgt. Da aber der Ausdruck

$$\frac{l(n+1)}{l n} = 1 + \frac{l\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{l n} = 1 + \frac{1}{n\,l n} + \frac{1}{\beta n^2 l n} = 1 + \frac{1}{n\,l n} + \frac{1}{\beta_1 n^2}\,{}^{*)}$$

(wobei $\beta_1 = \beta\, l n$), so ist ferner $\left(\frac{l(n+1)}{l n}\right)^y = \left(1 + \frac{1}{n\,l n} + \frac{1}{\beta_1 n^2}\right)^y = l\, n$

also $y\, l\left(1 + \left(\frac{1}{n\,l n} + \frac{1}{\beta_1 n^2}\right)\right) = l_2 n$

$$y\left(\frac{1}{n\,l n} + \frac{1}{\beta_1 n^2} + \frac{1}{\beta_2}\left(\frac{1}{n\,l n} + \frac{1}{\beta_1 n^2}\right)^2\right) = l_2 n \text{ und endlich}$$

$$y\left(\frac{1}{n\,l n} + \frac{1}{\beta_3 n^2}\right) = l_2 n \text{ (wenn } \beta_3 = \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{(\beta_2\, l n)^2} + \frac{2}{\beta_1 \beta_2 n\, l n} + \frac{1}{\beta_1 n^2}$$

gesetzt wird). Aus dieser Gleichung erhält man nun:

$\frac{1}{y} = \frac{1}{n\,l n\, l_2 n} + \frac{1}{\beta_3 n^2 l^2 n} = \frac{1}{n\,l n\, l_2 n} + \frac{1}{\beta_4 n^2}$, ($\beta_4 = \beta_3 l^2 n$ gesetzt) und hiermit:

$\frac{l_2(n+1)}{l_2 n} = 1 + \frac{1}{n\,l n\, l_2 n} + \frac{1}{\beta_4 n^2}$. Mit Hilfe dieser Gleichung wird man durch Fortsetzung des obigen Verfahrens auch leicht $\frac{l_3(n+1)}{l_3 n}$ und überhaupt successive $\frac{l_4(n+1)}{l_4 n}, \ldots \frac{l_r(n+1)}{l_r n}$ transformieren können, und zwar

*) Es ist nämlich $l\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{\beta n^2}$

findet man $\frac{l_r(n+1)}{l_r n} = 1 + \frac{1}{n\, l n\, l_2 n \ldots l_r n} + \frac{1}{\varepsilon n^2}$, wobei ε eine Zahl ist, welche vermöge ihrer Entstehung nicht Null wird, wenn n ins Unendliche wächst. Mit Hilfe des Grenzwerthes $lim \frac{\left[1+\frac{1}{n}\right]^k - 1}{\frac{1}{n}} = k$ überzeugt man sich ferner leicht von der Richtigkeit der Gleichung $\left(1+\frac{1}{n}\right)^k = 1 + \frac{k}{n} + \frac{1}{\gamma n^2}$, in welcher γ eine nicht näher bestimmte Zahl bezeichnet, von welcher man aber weiss, dass sie nicht Null wird für $n = \infty$, und nun hat es keine Schwierigkeit, die Gleichung $\left[\frac{l_r(n+1)}{l_r n}\right]^k = 1 + \frac{1}{n\, l n \ldots l_r n} + \frac{1}{\gamma' n^2}$ nachzuweisen. Durch Multiplication der Gleichungen $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$, $\frac{l(n+1)}{l n} = 1 + \frac{1}{n\, l n} + \frac{1}{\beta_1 n^2}$, $\frac{l_2(n+1)}{l_2 n} = 1 + \frac{1}{n l n l_2 n} + \frac{1}{\beta_3 n^2}, \ldots \left(\frac{l_r(n+1)}{l_r n}\right)^k = 1 + \frac{k}{n\, l n \ldots l_r n} + \frac{1}{\gamma' n^2}$ erhält man die Eingangs angegebene Gleichung.

Zu VIII.

A) Eine Reihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$ heisst eine recurrente, rücklaufende oder wiederkehrende der r^{ten} Ordnung, wenn a_n mit den r vorhergehenden Coefficienten $a_{n-1}, \ldots a_{n-r}$ durch die lineare Gleichung: 1) $a_n + \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2 a_{n-2} + \ldots + \alpha_r a_{n-r} = 0$ verbunden ist, in welcher $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ gegebene Constanten bezeichnen, die, mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen, die Beziehungs- oder Relationsscala heissen.

Es ist nicht schwer, die Summenformel einer recurrenten Reihe zu entwickeln. Denn ist für eine solche der r^{ten} Ordnung

$$S_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1},$$

so hat man blos diese Gleichung successive mit $\alpha_1 x, \alpha_2 x^2, \ldots \alpha_r x_r$ zu multiplicieren, dann sämmtliche Gleichungen zu addieren und zu beachten, dass keine Potenzen von x, deren Exponent zwischen $r-1$ und n liegt, vermöge der Gleichung 1) vorkommen können, um zu finden:

$$S_n(1+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_r x^r)=A_0+A_1 x+\ldots+A_{r-1}x^{r-1}$$
$$-(B_0+B_1 x+\ldots+B_{r-1}x^{r-1})x^n$$

$$2)\ S_n=\frac{A_0+A_1 x+\ldots+A_{r-1}x^{r-1}}{1+\alpha_1 x+\ldots+\alpha_r x^r}-\frac{B_0+B_1 x+\ldots+B_{r-1}x^{r-1}}{1+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots\alpha_r x^r}\cdot x^n,$$

wobei zur Abkürzung: 3) $a_0=A_0, a_1+\alpha_1 a_0=A_1, a_2+\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_0=A_2$
$a_{r-1}+\alpha_1 a_{r-2}+\alpha_2 a_{r-3}+\ldots+\alpha_{r-1}a_0=A_{r-1}$
und 4) $-B_0=\alpha_1 a_{n-2}+\alpha_2 a_{n-2}+\ldots+\alpha_r a_{n-r}$
$-B_1=\alpha_2 a_{n-1}+\alpha_3 a_{n-2}+\ldots+\alpha_{r+1}a_{n-r}$ etc.
gesetzt wurde. Vermöge der Gleichungen 4) und 1) ist aber auch:

$$-B_0+a_n=0,\ -B_1+a_{n+1}+\alpha_1 a_n=0,$$
$$-B_2+a_{n+2}+\alpha_1 a_{n+1}+\alpha_2 a_n=0 \text{ etc.}$$

und daher

$$B_0=a_n,\ B_1=a_{n+1}+\alpha_1 a_n,\ B_2=a_{n+2}+\alpha_1 a_{n+1}+\alpha_2 a_n \text{ etc.},$$

woraus man ersieht, dass die Grössen $B_0\ B_1 \ldots\ldots$ aus $a_n, a_{n+1}\ldots\ldots$ genau so gebildet werden, wie $A_0, A_1, \ldots\ldots$ aus $a_0, a_1, \ldots\ldots$ Aus S_n erhält man die Summe, oder die erzeugende Function der unendlichen Reihe, wenn man n ins Unendliche wachsen lässt und den Grenzwerth des Ausdruckes bestimmt. Dieser Grenzwerth ist aber für alle innerhalb der Convergenzgrenzen liegende x der rationale Bruch

$$\frac{A_0+A_1 x+\ldots+A_{r-1}x^{r-1}}{1+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots\alpha_r x^r};$$

denn das zweite Glied im rechten Theile der Summenformel (2) convergiert unter dieser Voraussetzung gegen die Null. Um diese Behauptung ganz allgemein zu beweisen, bezeichne [z] den Zahlwerth der Zahl z und sei $B'_s=[a_{n+s}]+[\alpha_1][a_{n+s-1}]+\ldots[\alpha_s][a_n]$; so ist
$[B_s]\leqq B'_s, [B_0+B_1 x+\ldots+B_{r-1}x^{r-1}]\leqq B'_0+B'_1[x]+\ldots+B'_{r-1}[x^{r-1}]$
und $B'_0<B'_1<B'_2<\ldots B'_r$, woraus weiter

$$[B_0+B_1 x+\ldots+B_{r-1}x^{r-1}]<B'_{r-1}(1+[x]+\ldots[x^{r-1}])=B'_{r-1}\cdot\left(\frac{1-[x^r]}{1-[x]}\right)$$

folgt. Der Ausdruck $\frac{B_0+B_1 x+\ldots+B_{r-1}x^{r-1}}{1+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_r x^r}x^n$ convergiert nun sicher gegen Null, wenn dasselbe mit $B'_{r-1}[x]^n=[\alpha_r a_{n-1}][x]^n$ der Fall ist, und dieses Letztere tritt immer ein, wenn $\lim [a_{n-1}][x]^{n-1}=\lim(\sqrt[n-1]{[a_{n-1}]}\cdot[x])^{n-1}=0$, also $\lim\sqrt[n-1]{[a_{n-1}]}\cdot[x]<1$ ist. Diese letztere Bedingung ist aber die der Convergenz der Reihe*).

---

*) Wenn nämlich für die nur positive Glieder enthaltende Reihe

$$u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}+\ldots,\ \lim\sqrt[n-1]{u_{n-1}}=\alpha<1$$

ist, so liegen deren Glieder von einem gewissen n an unter jenen einer convergenten geometrischen Progression. Im vorliegenden Falle ist $u_{n-1}=[a_{n-1}]x^{n-1}$.

„**Die erzeugende Function einer convergenten recurrenten Reihe der** r^{ten} **Ordnung ist also eine rationale echtgebrochene Function, deren Nenner ebenfalls von der** r^{ten} **Ordnung ist.**“ Und umgekehrt:

„**Jede rationale echtgebrochene Function kann als die Summe einer recurrenten Reihe von der** r^{ten} **Ordnung angesehen werden.**“

Durch die Gleichung 1) ist das allgemeine Glied a_n blos in recurrierender Form gegeben; die Zerlegung echtgebrochener Functionen in Partialbrüche als bekannt vorausgesetzt, kann man dasselbe auf folgende Weise auch in dependenter Form darstellen. Ist nämlich

$$\frac{A_0 + A_1 x + \ldots A_{r-1} x^{r-1}}{1 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_r x^r}$$

der Summenbruch einer recurrenten Reihe, so lässt sich dieser als eine Summe von Brüchen darstellen, welche in einer der beiden Formen $\frac{C}{(1 - c x^m)}$ oder $\frac{Dx + E}{[(x - d)^2 + e^2]^m}$ (m positiv und ganz) enthalten sind. Betrachtet man diese einzelnen Brüche selbst als erzeugende Functionen rücklaufender Reihen, und bestimmt deren allgemeine Glieder, so ist das Aggregat dieser Glieder das allgemeine Glied der ursprünglichen Reihe. Was nun zunächst die dem Bruche

$$\frac{C}{(1 - c x)^m} = \frac{C}{1 - (m)_1 c x + (m)_2 c^2 x^2 - \ldots \pm c^m x^m}$$

entsprechende Reihe anbelangt, so ist dieselbe von der m^{ten} Ordnung, ihre Relationsscala ist $+ (m)_1 c, - (m)_2 c^2, \ldots \mp c^m$, und man findet aus den Gleichungen 3) wenn man in denselben für $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ die entsprechenden Werthe, ferner $A_0 = C$ und $A_1 = A_2 = \ldots = A_{r-1} = 0$ setzt, für $a_0, a_1, a_2 \ldots$ successive die Werthe: $a_0 = C$, $a_1 = (m)_1 C c$, $a_2 = ((m)_1^2 - (m)_2) C c^2 = (m + 1)_2 C c^2$, $a_3 = [(m)_1 (m + 1)_2 - (m)_2 (m)_1 + (m)_3] C c^3 = (m + 2)_3 C c^3$ etc., aus welchen man schliesst, dass $a_n = (m \quad n - 1)_n C c^n$ sein müsse, wovon man sich auch leicht durch den Schluss von n auf $n + 1$ überzeugen kann.

Nicht so einfach ist das allgemeine Glied der dem Bruche $\frac{D + E}{[(x - d)^2 + e^2]^m}$ entsprechenden Reihe zu bestimmen. Für den besondern Fall $m = 1$ findet man die Lösung in No. 8).

1) Den Bruch in Partialbrüche zerlegt, findet man:

$$\frac{1+x}{1-x-x^2}=\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+x}\quad\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}-x}=$$

$$=\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})\sqrt{5}}}{1+\frac{+2x}{1+\sqrt{5}}}-\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{(1-\sqrt{5})\sqrt{5}}}{1+\frac{2x}{1-\sqrt{5}}};$$

daher ist $a_n=\frac{1-\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})\sqrt{5}}\cdot\frac{(-2)^n}{(1+\sqrt{5})^n}-\frac{1+\sqrt{5}}{(1-\sqrt{5})\sqrt{5}}\cdot\frac{(-2)^n}{(1-\sqrt{5})^n}\cdot$

$$=\frac{(-2)^n}{\sqrt{5}}\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})^{n+1}}-\frac{1+\sqrt{5}}{(1-\sqrt{5})^{n+1}}\right\}.$$

Die Reihe convergiert für $-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})<x<\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$

3) $a_n=\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}}{2}+\frac{(1-\sqrt{5})^{n+1}}{2}$

4) $\frac{\frac{2}{3}}{1+x}+\frac{\frac{1}{3}}{1-2x}$; $a_n=\frac{2^n\pm 2}{3}$. Conv. für $x^2<4$

5) $\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}}{2-\sqrt{5}+x}+\frac{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}}{2+\sqrt{5}+x}$,

6) $a_n=2.3^n-2^n$

7) $\frac{\frac{1}{4}}{1-x}+\frac{\frac{1}{4}}{1-x}+\frac{\frac{1}{2}}{(1-x_2)}$, $\quad a_n=\frac{1}{4}+\frac{(-1)^n}{4}+\frac{n-1}{2}$

8) bis 11) Zerlegt man den Bruch $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}=$ $\frac{1}{1-x)^3(1+x)(1+x+x^2)}$ in Partialbrüche, so findet man denselben gleich $\frac{1}{6(1-x)^3}+\frac{1}{4(1-x)^2}+\frac{17}{72(1-x)}+\frac{1}{8(1+x)}+\frac{2+x}{9(1+x+x^2)}$.

Von diesen Brüchen liefert zu a_n der erste $\frac{1}{6}(n+2)_2$, der zweite $\frac{1}{4}(n+1)$, der dritte $\frac{17}{72}$, der vierte $\frac{1}{8}(-1)^n$. Was aber den Bruch $\frac{\frac{2}{9}+\frac{x}{9}}{1+x+x^2}$ an-

belangt, der sich nicht weiter auf reelle Weise zerlegen lässt, so ist derselbe in der allgemeinen Form $\frac{M + Nx}{(x - d)^2 + e^2}$ enthalten, welche sich durch die Substitution $d = \frac{1}{p} \cos \varphi$, $e = \frac{1}{p} \sin \varphi$, $Mp^2 = A$, $Np = B$ in $\frac{A + Bpx}{1 - 2px \cos \varphi + p^2 x^2}$ verwandelt. Dieser letzte Quotient ist die Summe der beiden Ausdrücke $(A \cot \varphi + B \operatorname{cosec} \varphi) \cdot \frac{px \sin \varphi}{1 - 2px \cos \varphi + p^2 x^2}$ und $A \cdot \frac{1 - px \cos \varphi}{1 - 2px \cos \varphi + p^2 x^2}$, welche recurrierende Reihen liefern, deren allgemeine Glieder sind:

$$(A \cot \varphi + B \operatorname{cosec} \varphi) \sin n \varphi \,.\, p^n x^n \text{ und } A \cos n \varphi \,.\, p^n x^n$$

Also ist die Summe dieser beiden: $\frac{A \sin (n + 1) \varphi + B \sin n \varphi}{\sin \varphi} \cdot p^n x^n$ das allgemeine Glied der dem Bruche $\frac{A + Bpx}{1 - 2px \cos \varphi + p^2 x^2}$ entsprechenden Reihe. Im vorliegenden Beispiele hat man nun, um den Bruch $\frac{\frac{2}{9} + \frac{x}{9}}{1 + x + x^2}$ mit $\frac{A + Bpx}{1 - 2px \cos \varphi + p^2 x^2}$ in Uebereinstimmung zu bringen, $-2p \cos \varphi = 1$ $p = -1$, $A = \frac{2}{9}$, $B = -\frac{1}{9}$ zu setzen. Hierdurch wird $\varphi = \frac{\pi}{3}$ und das gesuchte allgemeine Glied $= \frac{4 \sin (n + 1) \frac{\pi}{3} - 2 \sin \frac{n \pi}{3}}{9 \sqrt{3}} \cdot (-1)^n x^n$.
Die Summe der gefundenen allgemeinen Glieder ist das allgemeine Glied der aus dem Bruche $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$ entspringenden Reihe. (Man berechne noch a_n für $n = 6m, 6m + 1, 6m + 2, 6m + 3, 6m + 4, 6m + 5$).

12) $a_n = \frac{3}{4} n + 1, \frac{3}{4} n + \frac{5}{4}, \frac{3}{4} n + \frac{3}{2}, \frac{3}{4} n + \frac{3}{4}$ je nachdem $n = 4m, 4m + 1, 4m + 2, 4m + 3$.

13) $= \frac{1 - 5x + 8x^2}{\sqrt{3}(1 - 3x)^2 (1 - 2x)}$; $a_n = \frac{1}{3} (2n - 3) 3^n + 2^{n+1}$.

14) Man setze $\sqrt{x} = y$.

16) bis 32) Eine recurrente Reihe r^{ter} Ordnung ist durch 2r Folgeglieder bestimmt. Zur Bestimmung von a_{2r} hat man folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{l} a_r \quad + \alpha_1 a_{r-1} + \alpha_2 a_{r-2} + \ldots + \alpha_r a_0 = 0 \\ a_{r+1} + \alpha_1 a_r \quad + \alpha_2 a_{r-1} + \ldots + \alpha_r a_1 = 0 \\ \vdots \\ a_{2r} \quad + \alpha_1 a_{2r-1} + \alpha_2 a_{2r-2} + \ldots + \alpha_r a_r = 0 \end{array}$$

aus welchen durch Elimination von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ folgt:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots a_r \\ a_1 & a_2 & \ldots a_{r+1} \\ \vdots & & \\ a_r & a_{r+1} & \ldots a_{2r} \end{vmatrix} = 0$$

Für a_{2r+1} erhält man ebenso

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots a_{r+1} \\ a_2 & a_3 & \ldots a_{r+2} \\ \vdots & & \\ a_{r+1} & a_{r+2} & \ldots a_{2r+1} \end{vmatrix} = 0$$

In 16) ist demnach a_4 zu bestimmen aus

$$\begin{vmatrix} 1, & 3, & 4 \\ 3, & 4, & 7 \\ 4, & 7, & a_4 \end{vmatrix} = 4(3.7 - 4^2) + 7(4.3 - 1.7) + a_4(1.4 - 3^2) = 0,$$

woraus $a_4 = 11$ folgt.

22) $1200\,x^6 + 6912\,x^7 + 39808\,x^8$ 23) $4x^6 + 13x^7 + 7x^8$.

24) $2122\,x^6 + 17593\,x^7 + 145861\,x^8$. 25) $63\,x^6 + 188x^7 + 313x^8$

27) $28x^6 + 27x^7 + 90x^8$. 28) $313x^6 + 711x^7 + 1593x^8$.

29) $457x^6 + 347x^7 + 3345x^8$. 30) $x^6 + 2x^7 + x^8$.

34) Es sei 1) $1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = (1 - px)(1 - qx)$ der Nenner der die Reihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ erzeugenden Function und daher nach Früherem $a_n = M p^n + N q^n$ und $a_{n+1} = M p^{n+1} + N q^{n+1}$. Hieraus folgt

$a_n q - a_{n+1} = M(q - p) p^n$, $a_n p - a_{n+1} = N(p - q) q^n$ und

$(a_n q - a_{n+1})(a_n p - a_{n+1}) = MN(p - q)^2 p^n q^n$ oder

$$2)\ a_n^2 pq - (p + q) a_n a_{n+1} + a^2_{n+1} = MN(p - q)^2 p^n q^n.$$

Aber nach 1) ist $-(p + q) = \alpha_1$ und $pq = \alpha_2$, und die unbekannten Constanten M und N sind aus den Gleichungen $a_0 = M + N$, $a_1 = Mp + Nq$ zu berechnen. Diese Werthe in 2) substituiert erhält man

$$3)\ a^2 a_n^2 + \alpha_1 a_n a_{n+1} + a_{n+1}^2 = (\alpha_2 a_0^2 + \alpha_1 a_0 a_1 + a_1^2)\,\alpha_2^n,$$

aus welcher Gleichung a_{n+1} berechnet werden kann, wenn a_n gegeben ist, oder umgekehrt.

In 34) ist $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 5$, daher übergeht 3) in $a_3^2 - 10a_3 + 25 = 1$, woraus $a_3 = 5 \pm 1$ folgt, von welchen beiden Werthen jedoch nur 4 beizubehalten ist.

36) Die erzeugende Function für eine Reihe r^{ter} Ordnung $a_0 + a_1 x + \ldots$ ist $\dfrac{A_0 + A_1 x + \ldots + A_{r-1} x^{r-1}}{1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots \alpha_r x^r}$. Zur Bestimmung des Nenners hat man

die Gleichungen
$$a_0 \alpha_r + a_1 \alpha_{r-1} + \ldots + a_r = 0$$
$$a_1 \alpha_r + a_2 \alpha_{r-1} + \ldots + a_{r+1} = 0$$
$$\vdots$$
$$a_r \alpha_r + a_{r+1} \alpha_{r-1} + \ldots + a_{2r} = 0$$
aus welchen
$$\alpha = \begin{vmatrix} -a_r & a_1 & \ldots a_{r-1} \\ -a_{r+1} & a_2 & \ldots a_r \\ \vdots & & \\ -a_{2r} & a_{r+1} & \ldots a_{2r-1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots a_{r-1} \\ a_1 & a_2 & \ldots a_r \\ \vdots & & \\ a_r & a_{r+1} & \ldots a_{2r} \end{vmatrix}$$
folgt.

Die Constanten des Zählers findet man aus den Gleichungen 3) in (A).

37) $S_{16} = \dfrac{5 + 3x + 35x^{16} + 33x^{17}}{1 + 2x + x^2}$.

38) $S_n = [3 - 3x + 2x^2 - (n^2 + 2n + 3) x^n + + (2n^2 + 2n + 3) x^{n+1} - (n^2 + 2) x^{n+2}] : (1 - x)^3$.

40) Ist $S = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ die zu untersuchende Reihe, so bestimme man nach Lagrange die ersten zwei Glieder des Quotienten $\frac{1}{S}$, wodurch man $p + qx$ und einen Rest $x^2 R_1$ findet. Es sei ferner

$$\frac{S}{R_1} = p_1 + q_1 x + x^2 \frac{R_2}{R_1}$$
$$\frac{R_1}{R_2} = p_2 + q_2 x + x^2 \frac{R_3}{R_2}$$
etc. und endlich R_{r-2} durch R_{r-1} theilbar, so dass $\frac{R_{r-2}}{R_{r-1}} = p_{r-1} + q_{r-1} x$; so ist die Reihe eine recurrierende der r^{ten} Ordnung.

Im vorliegenden Beispiele ist $\frac{1}{S} = 1 + 3x$. Die Reihe ist also eine recurrierende der 1ten Ordnung und $S = \frac{1}{1 + 3x}$ ihre Summe. In der That ist die Reihe eine geometrische Progression.

41) $\dfrac{1}{S} = 1 - 4x + 9x^2 \dfrac{(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots)}{S} = 1 - 4x + 9x^2 \dfrac{R_1}{S}$

$\frac{S}{R_1} = 1 + 2x$; die Reihe ist also eine recurrierende von der zweiten Ordnung, und ihre Summe ist $\frac{1 + 2x}{(1 - x)^2}$.

46) Die Reihe lässt sich in eine recurrierende verwandeln, denn es ist
$$S_n = x + x^2 + \ldots + x^n - (x^2 + x^4 + \ldots x^{2n}) = x \frac{1 - x^n}{1 - x} - x^2 \frac{1 - x^{2n}}{1 - x^2},$$
$$S = \lim S_n = \frac{x}{1 - x} - \frac{x^2}{1 - x^2} = \frac{x}{1 - x^2},$$
(wobei $x^2 < 1$). Für $x = 1$

nimmt S_n die Form $\frac{0}{0} - \frac{0}{0}$ an, deren wahrer Werth $n - \frac{2n}{2} = 0$ ist. Also ist auch $\lim S_n = S = 0$. Aus der Formel $S = \frac{x}{1 - x^2}$ folgt dagegen $S = \infty$ für $x = 1$. Man ersieht hieraus, dass die Summe der Reihe von $x = 0$ bis x nahezu $= 1$ im fortwährenden Wachsen begriffen ist, für $x = 1$ aber plötzlich von dem unendlich grossen Werth auf Null überspringt, und somit discontinuierlich wird.

49) Man setze den Ausdruck, dessen Unveränderlichkeit bewiesen werden soll, gleich P_n und berechne P_{n+1} etc.

50) und 51) Die beiden Sätze sind specielle Fälle eines allgemeineren, welchen wir unter der Voraussetzung, dass u_n von der Form $C_1 c_1^n + C_2 c_2^n + \ldots + C_r c_r^n$ sei, beweisen wollen. Unter dieser Voraussetzung ist nämlich

$$u_{n+h}\, u_{n+h'} = (C_1 c_1^{n+h} + \ldots + C_r c_r^{n+h})\,(C_1 c_1^{n+h'} + \ldots + C_r c_r^{n+h'})$$

$$= \sum_{p=1}^{p=r} \sum_{q=1}^{q=r} C_p C_q \,.\, c_p^h c_q^{h'} \,.\, (c_p c_q)^n \text{ und ebenso}$$

$$u_{n+k}\, u_{n+k'} = \sum_{p=1}^{p=r} \sum_{q=1}^{q=r} C_p C_q \,.\, c_p^k c_q^{k'} \,.\, (c_p c_q)^n \text{ und daher}$$

$$U_n = u_{n+h}\, u_{n+h'} - u_{n+k}\, u_{n+k'} = \sum_{p=1}^{p=r} \sum_{q=1}^{q=r} C_p C_q (c_p c_q)^n (c_p^h c_q^{h'} - c_p^k c_q^{k'})$$

Im rechten Theile dieser Gleichung werden, wenn man die Annahme $h + h' = k + k'$ macht, alle Glieder verschwinden, in welchen p und q gleiche Werthe besitzen, ausserdem kann man je zwei Glieder, welche einen gemeinschaftlichen Factor enthalten, zusammenfassen, und man findet:

$$U_n = B_{1,2} (c_1 c_2)^n + B_{1,3} (c_1 c_3)^n + \ldots + B_{r-1,r} (c_{r-1} c_r)^n, \text{ wobei}$$
$$B_{p,q} = C_p C_q (c_p^h c_q^{h'} + c_q^h c_p^{h'} - c_p^k c_q^{k'} - c_q^k c_p^{k'}) \text{ gesetzt wurde.}$$

Wie man sieht, ist U_n das allgemeine Glied einer gleichfalls recurrenten Reihe von der Ordnung $\frac{r(r-1)}{2}$. — Je nachdem man nun entweder $h = 0$, $h' = 2$ und $k = k' = 1$ oder $h = 0$, $h' = 3$ und $k = 1$, $k' = 2$ setzt, gelangt man zu 50) oder 51) zurück.

B) 57) Man verwandle den Ausdruck $1 + (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ in eine Reihe von der Form $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$, so erhält man mittelst des polynomischen Lehrsatzes für die m^{te} Potenz dieser Reihe eine Reihe von

der Form $A_0{}^m + A_1{}^m x + A_2{}^m x^2 + \dots$. Es bezeichne $A_n{}^{m+1}$ den Coefficienten des allgemeinen Gliedes in der Entwicklung von $(a_0 + a_1 x + \dots)^{m+1}$, so lässt sich derselbe aus $A_0{}^m$, $A_1{}^m, \dots$ vermittelst der Gleichung

$$\left(\alpha + \frac{n\beta}{m+1}\right) A_n^{m+1} = \alpha a_0 A_n^m + (\alpha + \beta)\, a_1 A_{n-1}^m + \dots + (\alpha + n\beta) a_n A_0^m{}^{*)},$$

in welcher α und β beliebige Zahlen bedeuten, berechnen.

Setzt man $\alpha = -1$, $\beta = 2$ und ferner — um auch A_{n+1}^{m+1} zu erhalten — $\alpha = 0$, $\beta = 2$ und $n + 1$ statt n, und addiert die so entstehenden Gleichungen, so findet man:

$$-A_n^m = \frac{2n - m - 1}{m+1} A_n^{m+1} + \frac{2n+2}{m+1} A_{n+1}^{m+1} \text{ und hieraus:}$$

$A_{n+1}^{m+1} = -\dfrac{m+1}{2(n+1)} A_n^m + \dfrac{m+1-2n}{2(n+1)} A_n^{m+1}$. Statt $m + 1$ blos m und n statt $n + 1$ setzend, und von den Werthen $A_0{}^m = 2^m$, $A_0{}^{m-1} = 2^{m-1}$ ausgehend, erhält man durch successive Berechnung: $A_1{}^m = m2^{m-2}$,

$A_2{}^m = \dfrac{m}{2} (m - 3)_1\, 2^{m-4}$, $A_3{}^m = \dfrac{m}{3} (m - 4)_2\, 2^{m-6}$ und allgemein

$A_n{}^m = \dfrac{m}{n} (m - n - 1)_{n-1}\, 2^{m-2n}$. Die Entwicklung gilt für alle jene x, für welche die Summe der Reihe $a_1 x + a_2 x^2 + \dots$, selbst wenn man in derselben alle Glieder auf ihren Zahlwerth reduciert, kleiner ist als $[a_0]$.

60) Man transformiere unter der Voraussetzung $x^2 < 1$ die Reihe zunächst in $(n)_1 P_1 + (n)_2 P_2 + (n)_3 P_3 + \dots$, worin $P_r = x^r + x^{2r} + x^{3r} + \dots$ ist, und ordne nun nach Potenzen von x. Ist m' ein Factor von m und $fm' = m$, so wird der Ausdruck $(n)_{m'} P_{m'} = (n)_{m'}(x^{m'} + x^{2m'} + \dots + x^{fm'} + \dots)$ ein Glied mit x^m — nämlich $(n)_{m'} x^{fm'}$ — und nur dieses einzige liefern etc.

---

*) Es ist bekanntlich

$$A_n{}^m = (m)_1\, a_0{}^{m-1}\, {}^nC_p{}^1 + (m)_2\, a_0{}^{m-2}\, {}^nC_p{}^2 + \dots + (m)_n\, a_0{}^{m-n}\, {}^nC_p{}^n,$$

wenn ${}^rC_p{}^m$ die Summe aller Combinationen der m^{ten} Klasse zur Summe r aus den unbeschränkt wiederholbaren Elementen $a_1, a_2, \dots a_r$ bezeichnet, jede Combination als ein Product aufgefasst und mit der zugehörigen Permutationszahl multipliciert. Aus dieser Gleichung leite man A_{n-1}^m, $A_{n-2}^m \dots A_1^m$ ab, multipliciere diese Gleichungen beziehungsweise mit αa_0, $(\alpha + \beta) a_1, \dots (\alpha + (n-1)\beta) a_{n-1}$, füge die Gleichung $(\alpha + \beta n) A_0{}^m = a_0{}^m$ hinzu, und addiere sämmtliche Gleichungen. Transformiert man sodann den rechten Theil unter Anwendung der aus der Combinationslehre her bekannten Formeln

$$ {}^rC_p^m = {}^rC_p^{m-1} a_0 + {}^{r-1}C_p^{m-1} . a_1 + \dots + a_r \text{ und}$$

$$ {}^rC_p^{m+1} = \frac{m+1}{r} \left[{}^{r-1}C_p^m\, a_1 + {}^{r-2}C_p^m . 2a_2 + \dots + r a_r \right],$$

so findet man die oben angegebene Gleichung.

Zu bemerken ist, dass dieses Bildungsgesetz nur für niedrigere Potenzen als die n^{te} gelten würde, wenn n eine positive und ganze Zahl wäre.

63) In der Gleichung $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$ lasse man an die Stelle von z die Reihe $a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$ treten, entwickle die einzelnen Potenzen derselben nach dem polynomischen Lehrsatze und ordne nach den Potenzen von x, wodurch man eine Reihe von der Form

$1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$ erhält, in welcher 1) $A_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{{}^n C_p^k}{k!}$,

wenn ${}^n C_p^k$ die Summe der Combinationen der k^{ten} Klasse zur Summe n aus den unbeschränkt wiederholbaren Elementen $a_1, a_2, \ldots a_n$, jede Combination als ein Product aufgefasst und mit der zugehörigen Permutationszahl multipliciert, bedeutet. Um aus der obigen für A_n gefundenen independenten Formel die recurrierende zu erhalten, wende man die der Combinationslehre entnommene Formel

$$ {}^n C_p^m \frac{m}{n} = [{}^{n-1} C_p^{m-1} \,.\, a_1 + {}^{n-2} C_p^{m-1} \,.\, 2a_2 + \ldots + $$
$$ + {}^{m-1} C_{m-1}^p (n - m + 1)\, a_{n-m+1}] $$

auf die einzelnen Glieder des obigen Summenausdrucks, das erste ausgenommen, an, füge den so entstehenden Gleichungen die folgende ${}^n C_p^1 = \frac{n\, a_n}{n}$ hinzu, und addiere sämmtliche Gleichungen. Man wird

hierdurch $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{{}^n C_p^k}{k!} = a_1 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{{}^{n-1} C_p^k}{k!} + 2a_2 \sum_{k=1}^{n-2} \frac{{}^{n-2} C_p^k}{k!} + \ldots + n\, a_n$,

d. h. 2) $A_n = \frac{a_1 A_{n-1} + 2a_2 A_{n-2} + \ldots + n\, a_n}{n}$, als gesuchte recurrierende Formel finden.

64) *a*) Es ist: $-\log(1 - x) = \log \frac{1}{1 - x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$, daher

$$ e^{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots} = e^{\log \frac{1}{1-x}} = \frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots, $$

also $a_n = \frac{1}{n}$ und $A_n = 1$. Die Formel 1) der vorigen Aufgabe übergeht

hiermit in $A_n = 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{{}^n C_p^k}{k:}$, wo die Combinationen aus den Elementen

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \frac{1}{n}$ zu bilden sind. Ist nun n eine Primzahl, so giebt es in der Summe $\sum_{k=1}^{n} \frac{{}^n C_p^k}{k!}$ nur die beiden Glieder $\frac{{}^n C_p^1}{1!} = \frac{1}{n}$ und $\frac{{}^n C_p^n}{n!} = \frac{1}{n!}$, in deren Nennern der Factor n vorkommt. Bezeichnet s die Summe der übrigen Glieder, so ist also auch 3) $1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n!} + s$ oder 4) $(1 - s).(n - 1)! = \frac{(n-1)! + 1}{n}$. Der linke Theil dieser Gleichung ist eine ganze Zahl, daher muss im rechten Theil $(n - 1)! + 1$ durch n theilbar sein. Man hat diese Eigenschaft nur in Worten auszudrücken, um den Wilson'schen Satz zu erhalten. Die Formel 3) lässt eine bemerkenswerthe Umgestaltung zu. Man denke sich nämlich aus $\frac{{}^n C_p^k}{1.2.3 \dots k}$ diejenige Form herausgehoben, in welcher das erste Element $a_1 = 1$ a mal, das zweite Element $a_2 = \frac{1}{2}$ b mal, das dritte Element $a_3 = \frac{1}{3}$ c mal u. s. w. vorkommt, so dass also $1a + 2b + 3c + \dots = n$ ist, so ist die zu dieser Combination gehörende Permutationszahl $\frac{1.2.3 \dots k}{1.2 \dots a . 1.2 \dots b . 1.2 \dots c \dots}$ und

$$\frac{k!}{a!\ b!\ c!} \cdot \frac{\left(1\right)^a \left(\frac{1}{2}\right)^b \left(\frac{1}{3}\right)^c \dots}{k!} = \frac{1}{a!\ b!\ c!\ 2^b\ 3^c \dots}$$

ist der Werth der betrachteten Combinationsform. Hiermit aber übergeht die Formel 3) in $1 = \sum \frac{1}{2^b\ 3^c\ a!\ b!\ c!}$ und liefert den von Jacobi aufgestellten Satz: die Summe aller Zahlen, welche man aus der Form $\frac{1}{2^b\ 3^c \dots a!\ b!\ c! \dots}$ erhält, wenn man für a, b, c,... solche positive ganze Zahlen (mit Einschluss der Null) setzt, dass $a + 2b + 3c + \dots$ denselben Werth n behält, welches auch dieser Werth sei, ist der Einheit gleich.

C) 68 *d*) Aus: $l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ durch Umformung der Reihe abzuleiten. Ist nämlich allgemein $S = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$ eine convergente Reihe mit regelmässigem Zeichenwechsel, und man setzt:

$$u_1 - u_2 = \Delta u_1,\quad u_2 - u_3 = \Delta u_2,\quad u_3 - u_4 = \Delta u_3 \ldots$$
$$\Delta u_1 - \Delta u_2 = \Delta^2 u_1,\quad \Delta u_2 - \Delta u_3 = \Delta^2 u_2,\quad \Delta u_3 - \Delta u_4 = \Delta^2 u_3 \ldots$$
$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

so ist
$$2S = u_1 + (u_1 - u_2) - (u_2 - u_3) + (u_3 - u_4) \ldots =$$
$$= u_1 + \Delta u_1 - \Delta u_2 + \Delta u_3 - \ldots$$
$$4S = 2u_1 + \Delta u_1 + (\Delta u_1 - \Delta u_2) - (\Delta u_2 - \Delta u_3) + \ldots =$$
$$= 2u_1 + \Delta u_1 + \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u_2 + \ldots$$
$$8S = 4u_1 + 2\Delta u_1 + \Delta^2 u_1 + (\Delta^2 u_1 - \Delta^2 u_2) - \ldots =$$
$$= 4u_1 + 2\Delta u_1 + \Delta^2 u_1 + \Delta^3 u_1 \ldots$$
$$16S = 8u_1 + 4\Delta u_1 + 2\Delta^2 u_1 + \Delta^3 u_1 + (\Delta^3 u_1 - \Delta^3 u_2) - \ldots =$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$= 8u_1 + 4\Delta u_1 + 2\Delta^2 u_1 + \Delta^3 u_1 + \Delta^4 u_1 - \ldots$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Bilden nun die Differenzen
$$\Delta u_1,\ \Delta u_2,\ \Delta u_3 \ldots$$
$$\Delta^2 u_1,\ \Delta^2 u_2,\ \Delta^2 u_3 \ldots$$
$$\Delta^3 u_1,\ \Delta^3 u_2,\ \Delta^3 u_3 \ldots$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
fallende Reihen, so folgt aus den vorstehenden Gleichungen:

$$\frac{1}{2} u_1 < S < \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{2} \Delta u_1$$

$$\frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{4} \Delta u_1 < S < \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{4} \Delta u_1 + \frac{1}{4} \Delta^2 u_1 \text{ u. s. w.}$$

und allgemein:

$$S > \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{4} \Delta u_1 + \frac{1}{8} \Delta^2 u_1 + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} \Delta^n u_1$$

$$S < \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{4} \Delta u_1 + \frac{1}{8} \Delta^2 u_1 + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} \Delta^n u_1 + \frac{1}{2^{n+1}} \Delta^{n+1} u_1$$

also
$$S = \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{4} \Delta u_1 + \frac{1}{8} \Delta^2 u_1 + \frac{1}{16} \Delta^3 u_1 + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{2^{n+1}} \Delta^n u_1 + \frac{\varrho}{2^{n+1}} \Delta^{n+1} u_1$$

$$(0 < \varrho < 1).$$

(Diese Reihentransformation rührt von Euler her.)

70) *b*) Mittelst *a*) und der Gleichung

$$1 = \sum_{n=2} \frac{1}{2^n} + \sum \frac{1}{3^n} + \sum \frac{1}{4^n} + \ldots,$$

abzuleiten. Vermittels der Gleichungen

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=1} \frac{1}{2^{2n}} + \sum \frac{1}{4^{2n}} + \sum \frac{1}{6^{2n}} + \ldots,$$

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=1} \frac{1}{3^{2n}} + \sum \frac{1}{5^{2n}} + \sum \frac{1}{7^{2n}} + \ldots,$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x}\right) = \frac{1}{(x-1)\,x\,(x+1)} = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^7} + \ldots$$

Versuche noch ähnliche Reihen für folgende Ausdrücke zu bilden:

a) $\log 2 - \frac{1}{2}$

b) $\frac{3}{4} - \log 2$

und zeige, dass

$$\log 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{5.6.7} + \ldots$$

$$\frac{3}{4} - \log = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8} + \ldots$$

72) *a*) $-x + \log\left[(1+x)\sqrt{1+x^2}\right] = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - 2\frac{x^4}{4}\right) + \left(\frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - 2\frac{x^8}{8}\right) + \left(\frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13} - 2\frac{x^{12}}{12}\right) + \ldots$

b) $x - \log\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} = \left(2\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right) + \left(2\frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{7} - \frac{x^9}{9}\right) + \left(2\frac{x^{10}}{10} - \frac{x^{11}}{11} - \frac{x^{13}}{13}\right)$

73) *a*) $\log\left(\frac{1+x}{1-x+x^2}\right) = 2\log(1+x) - \log(1-x^3) = \text{etc.}$

74) $\log(1+x) = \log\left(\frac{1}{1-x}\right) - \log\left(\frac{1}{1-x^2}\right) = \text{etc.}$

75) Soll die Potenzreihe $a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$ identisch sein mit einer Reihe von der Form $b_1\left(\frac{x}{1+x}\right) + b_2\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + b_3\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \ldots$, so muss zwischen den Coefficienten dieser Reihen die Beziehung bestehen: $b_n = (n-1)_0\, a_1 + (n-1)_1\, a_2 + (n-1)_2\, a_3 + \ldots (n+1)_{n-1}\, a_n$, welche man leicht findet, wenn man die zweite Reihe durch Entwicklung der einzelnen Glieder auf die Form der ersten Reihe bringt. Nun ist

$$\frac{1}{1+x}\,l\left(\frac{1}{1-x}\right) \text{ einerseits } = x - \left(1-\frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3 - \ldots$$

und andererseits auch $= \frac{1}{1+x}\left[\,l\left(1-\frac{x}{1+x}\right) - l\left(1-\frac{2x}{1+x}\right)\right] =$

$$= \frac{1}{1+x}\left[\frac{2-1}{1}\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{2^2-1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{2^3-1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \ldots\right]$$

Multipliciert man beide Reihen mit x, so erhält man

$$x^2 - \left(1-\frac{1}{2}\right)x^3 + \left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^4 - \ldots =$$

$$= \frac{2-1}{1}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{2^2-1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \frac{2^3-1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 + \ldots$$

demnach ist $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = -\left(1-\frac{1}{2}\right)$ etc., und

$$b_{n+1} = \frac{2^n-1}{n} = (n)_1 - \left(1-\frac{1}{2}\right)(n)_2 + \left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)(n)_3 - \ldots$$

76) Es sei $S = a_0x + a_1x^3 + a_2x^5 + a_3x^7 + \ldots$

Man multipliciere beiderseits mit x, setze sodann $x = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$ und entwickle die Glieder des rechten Theiles, so erhält man die von Euler gegebene Gleichung $\frac{Sy}{\sqrt{1+y^2}} = b_1y^2 + b_2y^4 + b_3y^6 + \ldots$, in welcher $b_{n+1} = a_n - (n)_1\,a_{n-1} + (n)_2\,a_{n-2} - (n)_3\,a_{n-3} + \ldots \pm a_0 =$ dem Anfangsgliede $\Delta^n a_0$ der n^{ten} Differenzenreihe aus den positiven Grössen $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots$

Wäre $S = a_0x - a_1x^3 + a_2x^5 - \ldots$, so würde man $x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ setzen und fände $\frac{S}{\sqrt{1-y^2}} = a_0y - \Delta a_0y^3 + \Delta^2 a_0y^5 - \ldots$

77) $\log(1-2x\cos\alpha+x^2)^{\frac{1}{2}} = -x\cos\alpha - \frac{x^2}{2}\cos 2\alpha -$

$$- \frac{x^3}{3}\cos 3\alpha - \frac{x^4}{4}\cos 4\alpha - \ldots$$

78) $y_1 + y_2 = -\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$

$$y_2 - y_1 = -\frac{1}{2}\log(1-2x\cos 2\alpha + x^2) =$$

$$= x\cos 2\alpha + \frac{x^2}{2}\cos 4\alpha + \frac{x^3}{3}\cos 6\alpha + \ldots$$

Aus diesen beiden Gleichungen findet man jene Reihen, welche beziehungsweise die Summen y_1 und y_2 besitzen.

79) Man verwandle die Ausdrücke $l(1-x)$, $l(1-x^2)$, $l(1-x^3)$ etc. in Reihen und addiere diese, so findet man

$$l(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots = -\left(P_1 + \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{3}P_3 + \ldots\right)$$

worin $P_n = x^n + x^{2n} + x^{3n} + \ldots$

Ordnet man nun die Reihe $-\left(P_1 + \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{3}P_3 + \ldots\right)$ nach den steigenden Potenzen von x und sucht den Coefficienten von x^n, so bemerkt man leicht, dass nur jene P, deren Stellenzeiger Theiler von n sind, je ein Glied mit x^n — und zwar nur ein einziges — liefern können.

81) In No. 63 wurde die Aufgabe gelöst, den Ausdruck $e^{a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots}$ in die Potenzreihe $1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots$ zu verwandeln. Aus der Gleichung $e^{a_1x + a_2x^2 + \ldots} = 1 + A_1x + A_2x^2 + \ldots$ folgt nun: $l(1 + A_1x + A_2x^2 + \ldots) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$ und die in No. 63 zur Berechnung von A_n aufgestellte recurrierende Formel liefert auch sofort die zwischen den Coefficienten $a_1, a_2, \ldots a_n$ stattfindende

$$a_n = \frac{nA_n - a_1A_{n-1} - 2a_2A_{n-2}\ldots - (n-1)\,a_{n-1}A_1}{n},$$

mittelst welcher man, von $a_1 = A_1$ ausgehend,

$$a_2 = A_2 - \frac{A_1^2}{2},\quad a_3 = A_3 - \frac{1}{2}.2A_1A_2 + \frac{1}{3}A_1^3,$$

$$a_4 = A_4 - \frac{1}{2}(2A_1A_3 + A_2^2) + \frac{1}{3}.3A_1^2A_2 - \frac{1}{4}A_1^4 \text{ und allgemein}$$

$$a_n = {}^nC_p^1 - \frac{1}{3}\,{}^nC_p^2 + \frac{1}{3}\,{}^nC_p^3 - \ldots + (-1)^{r-1}.\frac{1}{r}\,{}^nC_p^r$$

findet, wenn man unter ${}^nC_p^k$ die Summe der aus den unbeschränkt wiederholbaren Elementen $A_1, A_2 \ldots A_n$ gebildeten Combinationen der k^{ten} Klasse zur Summe n, jede Combination als ein Product aufgefasst und mit der dazu gehörigen Permutationszahl multipliciert, begreift.

(Welche bemerkenswerthe Beziehung ergiebt sich, wenn man die für a_n aufgestellte Gleichung auf $l\left(1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\right) = l\,e^x = x$ anwendet?)

95) *a*) und *b*) Man entwickle die Ausdrücke $\frac{1 - x\cos\varphi}{1 - 2x\cos\varphi + x^2}$ und $\frac{x\sin\varphi}{1 - 2x\cos\varphi + x^2}$ in Potenzenreihen, setze $x = (1-a)\cos\varphi$, subtrahiere von den ersten so entstehenden Gleichungen die Einheit, dividiere beide durch $1 - a$ und drücke schliesslich links $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ durch $\operatorname{tg}\varphi$ aus.

c) Man benütze die Formel $\frac{1}{2^n}\cot\frac{\varphi}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{\varphi}{2^{n-1}} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2^n}$

98) $\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{4}\cos^4 x + \frac{1}{6}\cos^6 x + \ldots$ 99) Siehe 75).

100) *a*) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^{11}}{11}\ldots$ *b*) $x + \frac{x^7}{7} + \frac{x^{13}}{13} + \ldots$ *c*) $\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^8}{8} + \ldots$

102) $x \sin\alpha + \frac{1}{2}x^2 \sin 2\alpha + \frac{1}{3}x^3 \sin 3\alpha + \ldots$

103) *a*) $\left(\frac{x}{1.1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{2.3}\right) - \left(\frac{x^5}{2^2.5} + \frac{x^6}{2^2.6} + \frac{x^7}{2^3.7} + \right)$

$+ \left(\frac{x^9}{2^4.9} + \frac{x^{10}}{2^4.10} + \frac{x^{11}}{2^5.11}\right) - \ldots$

104) Man drücke 2 arctang $(x - 1)$ durch 2 arctang $\frac{x}{2-x}$ aus.

105) Wendet man auf arctang $y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \ldots$ die in No. 76) angegebene Transformation an, so findet man

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2.4}{3.5}x^5 + \frac{2.4.6}{3.5.7}x^7 + \ldots \ (x^2 < 1)$$

106) In arctang $x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$ setze man $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und ziehe die Glieder paarweise zusammen.

Mittelst dieser Reihe berechneten die genannten Mathematiker die Ludolph'sche Zahl π im 17. Jahrhunderte auf 72, beziehungsweise auf 127 Dezimalstellen.

107) *a*) Diese Reihe erhält man aus der Formel

$$\frac{\pi}{4} = 2 \text{ arctang } \frac{1}{3} + \text{arctang } \frac{1}{7},$$

durch Entwicklung der Glieder des rechten Theiles und nachherige Reduction.

b) Mit Hilfe dieser Reihe berechnete Vega die Zahl π bis auf 140 Dezimalen und prüfte die Richtigkeit des Resultates bis auf 126 Dezimalen mittelst der Gleichung *a*).

c) Man erhält die vorliegende Reihe aus der von dem englischen Mathematiker Machin aufgestellten Gleichung:

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{1.5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \ldots\right),$$

mittelst welcher derselbe die Zahl π bis auf 100 Dezimalen und neuerdings Shanks bis auf 530 Dezimalen berechnete.

f) und *g*) Aus der Formel

$$\frac{\pi}{4} = 2 \text{ arctang } \frac{1}{3} + \text{arctang } \frac{1}{7} =$$

$$= 2 \text{ arctang } \frac{1}{4} + \text{arctang } \frac{1}{7} + \text{arctang } \frac{1}{13}$$

abzuleiten.

h) $\frac{\pi}{4} = 4 \text{ arctang } \frac{1}{6} + 4 \text{ arctang } \frac{1}{31} - 4 \text{ arctang } \frac{1}{239} =$ etc.

108) *c*) Es ist $\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$, daher $\frac{1}{2^2 - 1} =$ etc.

d) Aus *c*) und $\frac{1}{2} = \frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{4^2 - 1} + \frac{1}{6^2 - 1} + \ldots$ abzuleiten.

f) Man verbinde *e*) mit $\frac{1}{4} = \Sigma \frac{1}{3^{2n}} + \Sigma \frac{1}{5^{2n}} + \ldots$ durch Addition.

g) Aus *f*) und 70) *d*) abzuleiten unter Benützung der Eigenschaft, dass jede ungerade Potenz von $4n + 3$ wieder in der Form $4n + 3$ enthalten ist. Die Gleichung *g*) lässt sich auch schreiben:

$$\frac{\pi}{4} - l2 = \Sigma \frac{1}{x^{2n+1} - 1} + \Sigma \frac{1}{x^{2n+1} + 1} = \Sigma \frac{2 . x^{2n+1}}{x^{4n+2} - 1},$$

(wo man für x alle in der Form $4n + 3$ enthaltene Zahlen zu setzen hat, welche keine höhere Potenzen sind) und wurde in dieser Form von Euler aufgestellt.

h) Ebenfalls aus *f*) und 70) *d*) abzuleiten. Hierbei sei bemerkt, dass jede Potenz einer Zahl von der Form $4n + 1$ wieder in derselben Form enthalten ist.

i) Man verbinde die letzte der Gleichungen *g*) mit der letzten der Gleichungen *h*).

k) und *l*) In 103) setze man $x = \sqrt{2}$ und verbinde die so entstehende Gleichung mit $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$

m) Aus der Formel $\frac{\pi}{4} = 2 \text{ arctang } \frac{1}{3} + \text{arctang } \frac{1}{7}$ mittelst 103) abzuleiten.

n) Diese Gleichung ist in der allgemeineren

$$\frac{1}{s} = \cot s + \frac{1}{3} \text{ tg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{s}{3}\right) + \frac{1}{9} \text{ t } \left(\frac{\pi}{6} + \frac{s}{9}\right) + \ldots$$

$$- \text{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{s}{3}\right) - \frac{1}{9} \text{ tg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{s}{9}\right) - \ldots$$

welche von Euler mittelst der leicht nachweisbaren Formel

$$\cot s = \frac{1}{3}\cot\frac{s}{3} - \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{s}{3}\right) + \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{s}{3}\right)$$

entwickelt wurde, als besonderer Fall enthalten.

Zu IX.

Bezeichnet u_n eine gegebene Function des Stellenzeigers n, so ist das Product der n Factoren $u_1\, u_2 \ldots u_n$ selbst eine gewisse Function von n, welche P_n heissen möge, so dass $P_n = u_1\, u_2\, u_3 \ldots n_n$. Lässt man nun die Gliederzahl n ins Unendliche wachsen, so übergeht das endliche Product in ein unendliches, und hierbei wird P_n offenbar sich entweder einem einzigen bestimmten endlichen Werthe P oder — je nach Beschaffenheit der Zahl n — mehreren solchen Werthen unbegrenzt nähern, oder endlich mit unendlich wachsendem n selbst unendlich gross werden. Im ersten Falle heisst das unendliche Product convergent, in den beiden letzten Fällen divergent*). Die Entscheidung hierüber ist leicht, wenn man

1) $u_1\, u_2\, u_3 \ldots u_n = e^{lu_1 + lu_2 + lu_3 + \ldots + lu_n}$**).

2) $lu_1 + lu_2 + lu_3 + \ldots lu_n = s_n$ setzt; denn aus dieser Gleichung folgt unmittelbar:

a) Das unendliche Product convergiert oder oscilliert gleichzeitig mit der Reihe $lu_1 + lu_2 + lu_3 + \ldots$

b) Dasselbe divergiert, wenn die Reihe divergiert und $\lim s_n = +\infty$ ist.

c) Das unendliche Product convergiert gegen Null, wenn die Reihe divergiert und $\lim s_n = -\infty$ ist.

Die Reihe 2), deren Glieder durchgehends positiv oder negativ sind, je nachdem u_n für jedes n grösser oder kleiner als 1 ist, divergiert jedenfalls, wenn $\lim lu_n$ nicht Null, also $\lim u_n$ nicht 1 ist. „Ein unendliches Product also, in welchem sämmtliche Factoren um ein Angebbares grösser sind als die Einheit divergiert; es convergiert dagegen gegen Null, wenn sämmtliche Factoren um ein Angebbares kleiner sind als 1."

Nehmen wir nun an, es sei $\lim lu_n = 0$, also $\lim u_n = 1$. Die Reihe 2) kann dann ebenso gut convergent als divergent sein; doch lässt sich in dem Falle, als sämmtliche Factoren des Productes den Grenzwerth 1 durch Zunahme erreichen (also durchgehends kleiner sind als die Einheit), die Convergenz des unendlichen Productes behaupten. Denn nach der gemachten Voraussetzung sind sämmtliche Glieder der Reihe 2) negativ,

*) Divergente Producte, welche sich verschiedenen Grenzen nähern, nennt man auch oscillierende.

**) Diese Gleichung setzt sämmtliche Factoren des Productes als positiv voraus, doch ist dies keine Beeinträchtigung der Allgemeinheit, da es für den Zahlenwerth des Productes gleichgiltig ist, ob die einzelnen Factoren positiv oder negativ sind.

daher ist auch s_n negativ und $lim\ P = e^{lim\ s_n}$ entweder einer positiven endlichen Grösse oder der Null gleich, je nachdem die Reihe 2) convergiert oder divergiert.

Einer besonderen Untersuchung bedürfen nach dem Vorhergehenden also nur mehr jene Producte, bei welchen — wieder unter der Voraussetzung $lim\ u_n = 1$ — sämmtliche Factoren grösser als die Einheit, oder theils grösser, theils kleiner als dieselbe sind, und die Factoren einer jeden Gattung in unbegrenzter Anzahl vorkommen. Hierbei wird es in den meisten Fällen möglich sein, die Reihe 2), auf deren Convergenz oder Divergenz es ankömmt, durch einfachere Reihen zu ersetzen.

Stellt man nämlich das zu prüfende unendliche Product in der Form $(1 + v_1)(1 + v_2)(1 + v_3)\ldots$ dar, so ist

$$s_n = l(1 + v_1) + l(1 + v_2) \ldots . + l(1 + v_n).$$

Wendet man auf die einzelnen Glieder des rechten Theiles dieser Gleichung die Formel an $l(1 + x) = x - \frac{\varrho}{2} x^2$ *), in welcher ϱ eine positive Zahl und x einen beliebigen positiven oder negativen echten Bruch bezeichnet, indem man an die Stelle von x die Grössen $v_1, v_2 \ldots v_n$ **) treten lässt, wodurch ϱ in $\varrho_1, \varrho_2 \ldots \varrho_n$ übergehen möge, so erhält man:

$$s_n = (v_1 + v_2 + \ldots + v_n) - (\varrho_1 v_1^2 + \varrho_2 v_2^2 + \ldots + \varrho_n v_n^2).$$

Es sei ϱ_g die grösste und ϱ_k die kleinste der Grössen $\varrho_1, \varrho_2 \ldots \varrho_n$, so liegt der Ausdruck $\varrho_1 v_1^2 + \varrho_2 v^2 + \ldots \varrho_n v_n^2$ zwischen $\varrho_k (v_1^2 + v_2^2 \ldots + v_n^2)$ und $\varrho_g (v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2)$ und kann dann gleich $\delta (v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2)$ gesetzt werden, wenn δ eine zwischen ϱ_k und ϱ_g liegende nicht näher bestimmbare positive Zahl bezeichnet. Hierdurch wird

$$s_n = (v_1 + v_2 + \ldots + v_n) - \delta (v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2) \text{ und}$$

$$P = e^{lim\ (v_1 + v_2 + \ldots v_n) - \delta\ lim\ (v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2)} = e^{lim\ p_n - \delta\ lim\ q_n},$$

wenn man zur Abkürzung 3) $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n = p_n$ und
4) $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots + v_n^2 = q_n$ setzt.

Aus dieser Gleichung folgert man aber:

I) Das unendliche Product $(1 + v_1)(1 + v_2)(1 + v_3)\ldots$ ist mit der Reihe 3) gleichzeitig convergent und hat insbesondere den Werth Null, wenn die Reihe 4) divergiert.

II) Das unendliche Product hat den Werth Null, wenn $lim\ p_n = -\infty$ ist, oder wenn 3) oscilliert, während 4) divergiert, und es ist divergent, wenn $lim\ p_n + \infty$, die Reihe 4) dagegen convergiert.

---

*) Siehe Schlömilch's Handb. Handb. pag. 176.

**) Da $lim\ v_n = 0$ ist, so muss v von einem bestimmten Werthe des n anfangen, jedenfalls numerisch $<$ als 1 sein; man kann jedoch ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit annehmen, dass diese Eigenschaft schon bei v_1 beginne, indem man die Anfangsglieder des Productes, welche dieser Voraussetzung etwa nicht genügen, als für die Untersuchung unwesentlich, weglässt.

III) Wenn die Reihe 3) oscilliert, die Reihe 4) dagegen convergiert, so oscilliert auch das unendliche Product.

IV) Wenn beide Reihen divergieren und $\lim p_n = + \infty$ ist, so erscheint $\lim s_n$ unter der unbestimmten Form $\infty - \infty$ und die Convergenz und Divergenz des Productes bleibt unentschieden. In diesem Falle wird man zur allgemeinen Reihe 2) zurückzugreifen haben. So z. B. würde bei dem unendlichen Producte

$$\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\sqrt{\frac{1}{4}}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots$$

$\lim p_n - \lim q_n = \infty - \infty$ sein. Da aber die Reihe

$$\left[l\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+l\left(1-\frac{1}{2}\right)\right)+\left(l\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+l\left(1-\frac{1}{3}\right)\right)\ldots\right]$$

divergiert, und deren Glieder mit Ausnahme der zwei ersten durchgehends positiv sind, so divergiert auch das unendliche Product*).

1) 2) 3) $P = 0$. 4) conv. 5) div. 6) 7) 8) 9) conv. 10) $P = 0$, wenn $a > 1$. Für $a < 1$ oscill. zwischen $+ \infty$ und $- \infty$. 11) con. für jedes x. 12) conv. für jedes x. 13) $P = 0$ 14) conv. 15) conv. 16) 17) div. 18) conv. $P = 1$. 19) $P = 0$. 20) conv. 21) conv. 22) 23) $P = 0$. 24) conv. 25) $P = 0$. 26) con. $P = 0$. 29) div. 30) $P = 0$. 31) div.; denn da $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{2}{n}$, von $n = 5$ anlangend, so ist

$$p_{2n} > \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}\right)\frac{2}{3}\left(1 + \frac{2}{4}\right)\frac{3}{4}\left(1 + \frac{2}{5}\right)\frac{4}{5}\cdots\cdot\left(1 + \frac{2}{n+1}\right)\frac{n}{n+1} \text{ etc.}$$

32) div. 33) oscill. zwischen 0 und 1. 34) 35) oscill. 36) bis 41) conv. für $[q] < 1$. 42) bis 45) $P = 0$. 46) div. 48) Nach No. 51) III ist

$$l\, a = \lim \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2}\right) + \ldots + \frac{1}{m a - 1} \text{ **) für } m - \infty$$

und daher $l \sqrt[r]{a} = \lim \left(\frac{1}{m r} + \frac{1}{(m+1)r} + \frac{1}{(m+2)r} + \ldots + \frac{1}{(ma-1)r}\right)$.

*) Siehe auch: Stern: „Lehrbuch der algebraischen Analysis." Arndt: „Ueber die Convergenz der unendlichen Producte etc." in Grunert's „Archiv für Mathem. und Physik", 21. Band, 1. Heft, und den schon früher citierten Aufsatz von Weierstrass „Ueber die Theorie der analytischen Facultäten".

**) Dieser Grenzwerth lässt sich auch mittelst der Ungleichheit

$$l\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right) > \frac{1}{p} > l\left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

in welcher p eine positive Zahl > als 1 bedeutet, leicht finden.

Da aber $\frac{1}{(m+n)r} = l\left(1 + \frac{1}{(m+n)r}\right) + \frac{\mu_n}{(m+n)^2 r^2}$ (wo μ_n einen echten Bruch bezeichnet) und $lim\left(\frac{\mu_0}{m^2 r^2} + \frac{\mu_1}{(m+1)^2 r^2} + \ldots\right) = 0$, so folgt aus der obigen Gleichung:

$$l\sqrt[r]{a} = lim\left(l\left(1 + \frac{1}{m\,r}\right) + l\left(1 + \frac{1}{(m+1)r}\right) + \ldots + l\left(1 + \frac{1}{(m\,a-1)r}\right)\right),$$

und daher $\sqrt[r]{a} = lim \frac{(m\,r+1)}{m\,r} \cdot \frac{(m+1)\,r+1}{(m+1)\,r} \cdots \left(\frac{(m\,a-1)\,r+1}{(m\,a-1)r}\right)$

$$= lim \frac{(m+1)\,r+1}{(m+1)r} \cdot \frac{(m+2)\,r+1}{(m+2)r} \cdots \frac{m\,a\,r+1}{m\,a\,r}$$

Der rechte Theil dieser Gleichung bleibt ungeändert, wenn man ihn mit

$$\frac{r+1}{r} \cdot \frac{2r+1}{2r} \cdots \frac{m\,r+1}{m\,r} \cdot \frac{a\,r}{r\,a+a} \cdot \frac{2a\,r}{2r\,a+a} \cdots \frac{m\,a\,r}{m\,a\,r+a} = 1$$

multipliciert. Man findet hierdurch:

$$\sqrt[r]{a} = lim \frac{r+1}{r} \cdot \frac{2r+1}{2r} \cdots \frac{a\,r+1}{a\,r+2} \cdot \frac{(a+1)\,r+1}{(a+1)\,r} \cdots \frac{2a\,r+1}{2a\,r+a} \cdots \frac{m\,a\,r+1}{m\,a\,r+a}$$

und hieraus $\sqrt[r]{a} = P_0\,P_1\,P_2 \ldots P_n \ldots$, wenn man nämlich

$$P_n = \frac{(n\,a+1)\,r+1}{(n\,a+1)\,r} \cdot \frac{(n\,a+2)\,r+1}{(n\,a+2)\,r} \cdots \frac{((n+1)\,a-1)\,r+1}{((n+1)\,a-r)r} \cdot \frac{(n+1)\,a\,r+1}{(n+1)\,a\,r+1}$$

macht. Setzt man ferner

$$Q_n = \frac{n\,a\,r+1}{n\,a\,r+a} \cdot \frac{(n\,a+1)\,r+1}{n\,a+1)r} \cdots \frac{((n+1)\,a-1)\,r+1}{((n+1)\,a-1)\,r},$$

so ist auch $\sqrt[r]{a} = a\,Q_0\,Q_1\,Q_2 \ldots Q_n \ldots$ und (wegen $P_n > 1$ und $Q_n < 1$) $a\,Q_0\,Q_1 \ldots Q_n > \sqrt[r]{a} > P_0\,P_1 \ldots P_n$; der Fehler, welchen man begeht, wenn man $\sqrt[r]{a} = P_0 \ldots P_n$ setzt, ist daher geringer als die Differenz $a\,Q_0 \ldots Q_n - P_0 \ldots P_n$

$$= P_0\,P_1 \ldots P_n\left(a\,\frac{Q_0}{P_0}\frac{Q_1}{P_1} \cdots \frac{Q_n}{P_n} - 1\right) = P_0\,P_1 \ldots P_n\,\frac{a-1}{(n+1)\,a\,r+1}$$

49) *a*) und *d*) $P_n = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$

e) Man benütze die Formel $\sin x = 3 \sin \frac{x}{3}\left(1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{x}{3}\right)$ etc.

$P_n = \frac{\sin x}{3^n \sin \frac{x}{3^n}}$ *f*) Lässt sich bis auf einen constanten Factor in *e*) verwandeln.

50) Jedes Product lässt sich in eine gleichgeltende Reihe verwandeln, und umgekehrt. Es besteht nämlich für beliebige grosse n die Identität:

$$1)\ \frac{v_1}{1} \cdot \frac{v_1+v_2}{v_2} \cdot \frac{v_1+v_2+v_3}{v_1+v_2} \cdots \frac{v_1+v_2+\ldots+v_n}{v_1+v_2+\ldots+v_{n-1}} = v_1+v_2+v_3 \ldots + v_n$$

welche übergeht in

$$2)\ u_1 u_2 u_3 \ldots u_n = u_1 + u_1(u_2-1) + u_1 u_2 (u_3-1) + \ldots + u_1 u_2 \ldots u_{n-1}(u_n-1),$$

wenn man $\frac{v_1}{1} = u_1, \frac{v_1+v_2}{v_2} = u_2, \frac{v_1+v_2+v_3}{v_1+v_2} = u_3 \ldots$ setzt. Setzt man in 1): $v_1 = 1,\ v_2 = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1},\ v_3 = \frac{\alpha_2}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}$ etc., so findet man

$$3)\ \frac{1}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\ldots(1-\alpha_n)} = 1 + \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)} + \ldots + \\ + \frac{\alpha_n}{(1-\alpha_1)\ldots(1-\alpha_n)}$$

und wenn man in dieser Formel an die Stelle von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ die Quotienten $\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_3}{\beta_3} \ldots$ treten lässt, endlich

$$4)\ \frac{\beta_1}{\beta_1-\alpha_1} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_2-\alpha_2} \cdots \frac{\beta_n}{\beta_n-\alpha_n} = 1 + \frac{\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1} + \frac{\alpha_2\beta_1}{(\beta_1-\alpha_1)(\beta_2-\alpha_2)} + \ldots + \\ + \frac{\alpha_n \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{n-1}}{(\beta_1-\alpha_1)(\beta_n-\alpha_n)}$$

Von den vorgelegten Producten mögen folgende zwei besonders hervorgehoben werden;

g) Dieses Product lässt sich in die geometrische Progression

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots.$$

verwandeln. Da in der Reihe, in welcher alle Potenzen von x vorkommen, jede Potenz den Coefficienten 1 besitzt, deren Exponent aber durch Addition gewisser in der geometrischen Progression 1, 2, 4, 8, 16, ... enthaltenen Zahlen entsteht; so folgt hieraus, dass sich jede Zahl durch Addition aus den Gliedern der eben genannten Progression und zwar nur auf eine einzige Art bilden lasse.

h) Die gleichgeltende Reihe ist

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \ldots.$$

Die Exponenten der Glieder von gerader Ordnung sind in der Form $\frac{3m^2+m}{2}$, jene der Glieder ungerader Ordnung in der Form $\frac{3m^2-m}{2}$ enthalten; diese Exponenten bilden daher arithmetische Reihen 2ter Ordnung und die obige Reihe lässt sich kurz schreiben $\sum_0^\infty (-1)^m x^{\frac{3m^2 \mp m}{2}}$,

wenn man bei jeder Substitution für m zuerst das obere und dann das untere Zeichen nimmt. Jacobi hat (im XXI. Band von Crelle's Journal) gezeigt, dass die dritte Potenz dieser Reihe $= \sum_{0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) x^{\frac{n^2+n}{2}}$ ist.

51) Bezeichnet f (r, z) das unendliche Product und bringt man dasselbe unter die Form $\frac{1}{(1-z)(1-rz)(1-r^2z)\ldots\ldots}$, so sieht man, dass es sich in die Reihe $1 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots\ldots$ verwandeln lasse, und die Eigenschaft $f(r, rz) = (1-z) f(r, z)$ liefert die zur Bestimmung der Coefficienten nöthigen Gleichungen. Um das Theorem *a*) zu beweisen, beachte man, dass $f(q^2, x^2) = f(q, x) f(q, -x)$; ersetze jede dieser Funktionen durch die entsprechenden Reihen, verrichte das Angezeigte, und bestimme beiderseits den Coefficienten von x^n etc.

b) Man setze $r = q^{\frac{1}{2}}$

52) *a*) und *b*) Die entsprechenden Reihen sind:

$$1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + \ldots\ldots \text{ und}$$
$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + \ldots\ldots$$

Jeder Coefficient zeigt an, auf wievielerlei Arten der Exponent des zugehörigen x sich durch Addition aus der Zahlenreihe 1, 2, 3, ... bilden lasse, und zwar in *a*) wenn keine Wiederholungen und in *b*) wenn solche gestattet sind.

$$c) = \sum_{0}^{\infty} C_n z^n, \text{ worin } C_n = C_{n-1} \frac{x^n}{1-x^n} = \frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n)} =$$

der Summe der als Producte aufgefassten Combinationen ohne Wiederholungen aus den Grössen $x, x^2, x^3, \ldots$ in der n^{ten} Klasse. Hieraus folgt, dass in C_n der Coefficient von x^p gleich ist der Anzahl der verschiedenen Arten, die Zahl p aus n verschiedenen Gliedern der natürlichen Zahlenreihe zu bilden. (*A*.)

Verwandelt man ferner den Bruch $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n)}$ in eine Potenzenreihe, so zeigt der Coefficient von x^m an, auf wie viele Arten die Zahl m aus den Zahlen 1, 2, 3, ... n — bei erlaubter Wiederholung — durch Addition hervorgebracht werden kann. (*B*). Multiplicirt man nun diese Reihe mit $x^{\frac{n(n+1)}{2}}$, so erhält man die Entwicklung von C_n und der Coefficient von $x^{m+\frac{n(n+1)}{2}}$ ist offenbar identisch mit jenem von x^m der vorigen Reihe, daher folgt aus (*A*) und (*B*) der Satz:

„Auf ebenso viele Arten, als man eine Zahl m durch Addition aus den Zahlen 1, 2, 3,....n hervorbringen kann, auf ebenso viele Arten lässt sich auch die Zahl $m + \frac{n(n+1)}{2}$ in n ungleiche Theile theilen."

$$d) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n. \qquad e) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m z^m}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)}$$

P_n ist die Summe aller Combinationen der n^{ten} Klasse ohne Wiederholungen aus den Elementen x^{a_1}, x^{a_2}, x^{a_3}, ..., jede Combination als ein Product aufgefasst. Daher kann man aus dem Coefficienten von x^m in P_n ersehen, auf wie viele verschiedene Arten die Zahl m aus n verschiedenen Gliedern der Reihe $a_1, a_2, a_3, \ldots$ durch Addition gebildet werden kann.

53) $P_1 = 1 + \sum \pm \frac{1}{p^n}$, wo man für p alle Zahlen, welche nicht Potenzen kleinerer Zahlen oder durch solche theilbar sind, zu setzen hat. Von den beiden Zeichen hat man das obere oder untere beizubehalten, je nachdem sich p als Product einer geraden oder ungeraden Anzahl von Primfactoren darstellen lässt.

Ferner ist $\frac{1}{P_1} = \sum \frac{1}{p^n}$, wo man für p alle natürlichen Zahlen zu setzen hat.

a) b) c) d) e) Setzt man $S_m = \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \ldots$, so ist bekanntlich $S_2 = \frac{\pi^2}{6}$, $S_4 = \frac{\pi^4}{90}$, $S^6 = \frac{\pi^6}{945}$, $S^8 = \frac{\pi^8}{9450}$ etc. und diese Gleichungen liefern in Verbindung mit den Producten P_1, P_2 die gesuchten Relationen.

54) Man betrachte

$$u_n = \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}\right) \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7}\right) \ldots \left(\frac{2n+2}{2n+1} \cdot \frac{2n+2}{2n+3}\right)$$

$$v_n = \frac{2}{1} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}\right) \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5}\right) \ldots \left(\frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n+2}{2n+1}\right)$$

$$t_n = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}\right) \left(\frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6}\right) \ldots \left(\frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2}\right)$$

$$z_n = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right) \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4}\right) \ldots \left(\frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{2n+3}{2n+2}\right)$$

als allgemeine Glieder von Reihen und wende auf sie die aus der Theorie der Differenzenreihen bekannte Formel $y_n = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1 + \ldots \Delta y_{n-1}$ an, so erhält man Reihen, deren Summen beziehungsweise u_n, v_n, t_n und z_n sind. — Indem man diese Reihen mit schicklich gewählten Constanten

multiplciert und dann durch Addition mit einander verbindet, findet man nach vorhergehendem Grenzübergange die zu beweisenden Gleichungen.

55) *a*) Es sei $S = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \ldots\ldots$, $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) S = S_1$,

$\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) S_1 = S_2$, $\left(1 - \frac{1}{5^n}\right) S_2 = S_3$, $\left(1 - \frac{1}{7^n}\right) S_3 = S_4$,

$\left(1 - \frac{1}{11^n}\right) S_4 = S_5$ etc., dann fehlen in der Reihe S_1 alle Glieder, deren Nenner durch 2 theilbar sind, in S_2 ausser diesen auch die durch 3 theilbaren, in S_3 überdies die durch 5, in S_4 ausser diesen auch noch alle durch 7 und in S_5 endlich auch noch alle durch 11 theilbaren Glieder. Man sieht, dass man auf diese Weise eine Reihe $S_r = 1 + \frac{1}{p_1^n} + \frac{1}{p_2^n} + \frac{1}{p_3^n} + \cdots$ ableiten kann, in welcher mit Ausnahme der Einheit nur Glieder vorkommen, deren Nenner $p_1, p_2, p_3 \ldots.$ blos theilbar sind durch Primzahlen, welche grösser sind als die gegebene Primzahl p. Indem man sämmtliche so gebildete Gleichungen mit einander multipliciert, findet man $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\ldots.\left(1 - \frac{1}{p^n}\right) S = S_s$, aus welcher Gleichung (weil $\lim S_r = 1$) $S = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)\cdots}$ folgt, wenn man sich unter p eine unendlich grosse Zahl denkt. — Durch ein ähnliches Verfahren findet man die Reihe

$$b) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{3^n}\right)\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)\left(1 + \frac{1}{7^n}\right)\left(1 + \frac{1}{11_n}\right)\left(1 - \frac{1}{13^n}\right)\ldots.}$$

$$= \frac{3^n}{3^n + 1} \cdot \frac{5^n}{5^n - 1} \cdot \frac{7^n}{7^n + 1} \cdot \frac{11^n}{11^n + 1} \cdot \frac{13^n}{13^n - 1} \cdot \frac{17^n}{17^n - 1} \cdots$$

$$\text{und } c) = \frac{2^n}{2^n + 1} \cdot \frac{5^n}{5^n + 1} \cdot \frac{7^n}{7^n - 1} \cdot \frac{11^n}{11^n + 1} \cdot \frac{13^n}{13^n - 1} \cdots$$

56) und 57) Die Reihe $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) = 1 + \frac{(1 - q^\alpha)(1 - q^\beta)}{(1 - q)\ (1 - q^\gamma)} x + \frac{(1 - q^\alpha)(1 - q^{\alpha+1})(1 - q^\beta)(1 - q^{\beta+1})}{(1 - q)\ (1 - q^2)\ (1 - q^\gamma)(1 - q^{\gamma+1})} x^2 + \ldots$, welche von Heine aufgestellt und einer sehr gründlichen Untersuchung unterworfen wurde, besitzt viele interessante Eigenschaften, von welchen in Folgendem einige der einfachsten hervorgehoben werden mögen. — Die Reihe hängt, wie man sieht, von 5 Grössen ab, ändert sich nicht, wenn man α mit β ver-

tauscht, so dass $\varphi\,(\alpha, \beta, \gamma, q, x) = \varphi\,(\beta, \alpha, \gamma, q, x)$, und bricht nur dann ab, wenn α oder β eine negative ganze Zahl ist. Ist $q = 1$, so nehmen die Coefficienten die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, welche sich aber leicht auswerthen lässt, und man erhält die Gauss'sche hypergeometrische Reihe $1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta\,(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots.$ Ist ferner $q > 1$, so hat man sich blos der einfach nachweisbaren Formel

$$\varphi\,(\alpha, \beta, \gamma, q, x) = \varphi\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{1}{q}, xq^{\alpha+\beta-\gamma-1}\right)$$

zu bedienen, um eine Function zu erhalten, in welcher das vierte Element $\frac{1}{q} = q'$ kleiner als 1 ist.

Das Element q also kleiner als 1 vorausgesetzt, convergiert die Reihe nur dann, wenn $-1 < x < +1$ ist. — Folgende Gleichungen wird man ohne Mühe beweisen:

1) $\varphi\,(\alpha, \beta, \beta, q, x) = \varphi\,(\alpha, \gamma, \gamma, q, x) = \varphi\,(\alpha, 1, 1, q, x)$

2) $\varphi\,(\alpha, \beta, \gamma, q, x) - \varphi\,(\alpha, \beta, \gamma, q, qx) =$
$$= \frac{(1-q^\alpha)\,(1-q^\beta)}{(1-q^\gamma)}\,x\,\varphi\,(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, q, x)$$

3) $\varphi\,(\alpha, \beta, \beta, q, qx) = (1-x)\,\varphi\,(\alpha+1, \beta, \beta, q, x)$

4) $(1-q^\gamma)\,(1-q^{\alpha+\beta-\gamma-1}x)\,\varphi\,(\alpha\,\beta,\gamma,q,x) - (1-q^\gamma)\,\varphi\,(\alpha-1,\beta,\gamma,x) +$
$+\, q^{\alpha+\beta-\gamma-1}x\,(1-q^{\gamma-\beta})\,\varphi\,(\alpha, \beta, \gamma+1, q, x) = 0.$

Durch wiederholte Anwendung der Gleichung 2) ist man im Stande, $\varphi\,(\alpha+n, \beta+n, \gamma+n, q, x)$ für jeden ganzzahligen Werth von n durch $\varphi\,(\alpha, \beta, \gamma, q, x)\ \varphi\,(\alpha, \beta, \gamma, q, qx), \ldots.\ \varphi\,(\alpha, \beta, \gamma, q, q^n x)$ auszudrücken. Setzt man in derselben Gleichung $\beta = \gamma$ und verbindet sie sodann mit 3), so erhält man die in der 57sten Aufgabe angegebene Relation, aus welcher die Productenformel

$$5)\ \frac{\varphi\,(\alpha, \beta, \beta, q, x)}{\varphi\,(\alpha, \beta, \beta, q, q^n x)} = \frac{1-q^\alpha x}{1-x}\cdot\frac{1-q^{\alpha+1}x}{1-qx}\cdots\frac{1-q^{\alpha+n-1}x}{1-{}^{n-1}x}$$

folgt, die für $n = \infty$ (wegen $\lim \varphi\,(\alpha, \beta, \beta, q, q^n x) = 1$) in:

$$6)\ \varphi\,(\alpha, \beta, \beta, q, x) = \prod_{n=0}^{\infty}\frac{1-q^{\alpha+n}x}{1-q^n x}\ \text{übergeht.}$$

Aus 6) erhält man nun sehr einfach folgende Formeln:

$$\varphi\,(-m, \beta, \beta, -q^m x) = \prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1+q^n x)}{(1+q^{m+n}x)},$$

$$\varphi(-\infty, \beta, \beta, q, -q^{\infty} x) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + q^n x),$$

$$\varphi(\infty, \beta, \beta, q, -x) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + q^n x)}.$$

Um die Productenformel der 63sten Aufgabe zu erhalten, setze man in 4) $x = q^{\gamma - \alpha - \beta}$ und $\alpha + 1$ an der Stelle von α; man findet hierdurch

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, q^{\gamma - \alpha - \beta}) = \frac{1 - q^{\gamma - \beta}}{1 - q^{\gamma}} \varphi(\alpha + 1, \beta, \gamma + 1, q, q^{\gamma - \alpha - \beta})$$

und aus dieser Gleichung sehr einfach die folgende:

$$\varphi(\alpha, \beta \gamma, q, q^{\gamma - \alpha - \beta}) = \varphi(\alpha, + n, \beta, \gamma + n, q, q^{\gamma - \alpha - \beta}) . \prod_{n=0} \left[\frac{1 - q^{\gamma + n - \beta}}{1 - q^{\gamma + n}}\right].$$

Für *lim* $n = \infty$ übergeht

$$\varphi(\alpha, + n, \beta, \gamma + n, q, q^{\gamma - \alpha - \beta}) \text{ in } \varphi(1, \beta, 1, q, q^{\gamma - \alpha - \beta}) =$$

$$= \varphi(\beta, 1, 1, q, q^{\gamma - \alpha - \beta}) = \prod_{n=0}^{n=\infty} \left[\frac{1 - q^{\gamma + n - \alpha}}{1 - q^{\gamma + n - \alpha - \beta}}\right] \text{ etc.}$$

58) Ausgehend von der leicht nachweisbaren Gleichung

$\gamma \,.\, F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = (\gamma - \beta)\, F(\alpha + 1, \beta, \gamma + 1, 1)$ findet man

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\gamma - \beta}{\gamma} \cdot \frac{\gamma + 1 - \beta}{\gamma + 1} \cdot \frac{\gamma + 2 - \beta}{\gamma + 2} \cdots \frac{\gamma + n - 1 - \beta}{\gamma + n - 1} . F(\alpha + n, \beta, \gamma + n, 1)$$

$$= \frac{1.2.3\ldots.n.n^{\gamma - 1}}{(\gamma - 1 + 1)(\gamma - 1 + 2)\ldots(\gamma - 1 + n)} \times$$

$$\times \frac{(\gamma - \beta - 1 + 1)(\gamma - \beta - 1 + 2)\ldots(\gamma - \beta - 1 + n)}{1.2.3\ldots.n.n^{\gamma - \beta - 1}} \cdot \frac{F(\alpha + n, \beta, \gamma + n, 1)}{n^{\beta}}.$$

Setzt man $\psi(n, a) = \dfrac{1.2.3\ldots.n.n^{\alpha}}{(a + 1)(a + 2)\ldots.(a + n)}$, so ist:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\psi(n, \gamma - 1)}{\psi(n, \gamma - \beta - 1)} \cdot \frac{F(\alpha + n, \beta, \gamma + n, 1)}{n^{\beta}} \text{ und daher}$$

$$F(0, \beta, \gamma - \alpha, 1) = \frac{\psi(n, \gamma - \alpha - 1)}{\psi(n, \gamma - \beta - \alpha - 1)} \cdot \frac{F(n, \beta, \gamma + n, 1)}{n^{\beta}}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt aber für $n = \infty$

$$\frac{F(\alpha, \beta, \gamma, 1)}{(F 0, \beta, \gamma - \alpha, 1)} = F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\lim \psi(n, \gamma - 1)}{\lim \psi(n, \gamma - \alpha - 1)} \cdot \frac{\lim \psi(n\, \gamma - \beta - \alpha - 1)}{\lim \psi(n, \gamma - \beta - 1)}$$

und es erübrigt noch zu zeigen, dass sich die Function $\psi(n, a)$ für beliebige endliche a einer bestimmten endlichen Grenze nähere, wenn n ins Unendliche wächst, was auf folgende Weise geschehen kann. Es ist nämlich

$$\frac{\psi(n, a)}{\psi(n-1, a)} = \left(\frac{1}{1+\frac{a}{n}}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-a} = 1 + \frac{a(a+1)}{2n^2} + \frac{r_n}{n^3} \dots$$

und r_n endlich für jedes n. Setzt man also

$$k_n = \frac{a(a+1)}{2} + \frac{r_n}{n}, \text{ so ist: } \frac{\psi(n, a)}{\psi(n-1, a)} = 1 + \frac{k_n}{n^2}, \text{ und ferner}$$

$$\psi(n, a) = \psi(1, a)\left(1+\frac{k_2}{2^2}\right)\left(1+\frac{k_3}{3^2}\right)\dots\left(1+\frac{k_n}{3^2}\right).$$

Da aber $lim\ k_n = \frac{a(a+1)}{2}$ eine endliche Grösse ist, so ist die Reihe $\frac{k_2}{2^2} + \frac{k_3}{3^2} + \frac{k_4}{4^2} + \dots$ eine unbedingt convergierende, folglich convergiert auch das unendliche Product $\left(1+\frac{k_2}{2^2}\right)\left(1+\frac{k_3}{3^2}\right)\dots$ und

$$lim\ \psi(n, a) = lim \frac{1.2.3\dots n}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)} \cdot n^a =$$

$$= \underset{n=\infty}{lim} \frac{1.2\dots n}{(a+1)\dots(a+n)} \cdot \left(1+\frac{1}{1}\right)^a \cdot \left(1+\frac{1}{2}\right)^a \dots \left(1+\frac{1}{n}\right)^a$$

$$= \underset{n=0}{\Pi}\left(\frac{n}{a+n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^a = \psi(a) \text{ ist eine bestimmte endliche von}$$

Null verschiedene Grösse etc.

(Die gesuchte Gleichung erhält man auch aus der in der vorigen Aufgabe angegebenen Formel für $q = 1$.)

Zu X.

12) *c*) Mittelst der Identität

$(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma') = (\alpha\alpha' + \gamma\gamma')(\beta\beta' + \delta\delta') - (\alpha\beta' + \gamma\delta')(\beta\alpha' + \delta\gamma')$ abzuleiten, indem man die in derselben vorkommenden Grössen so wählt, dass $\alpha\delta - \beta\gamma = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ und $\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = a'^2 + b'^2 + c^2 + d'^2$ wird.

14) Drückt man den rechten Theil der Gleichung $e^y = tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$ durch Exponentialgrössen aus, so findet man $ie^y = \frac{ie^{xi} - 1}{ie^{xi} + 1}$ und hieraus $ie^{xi} = -\frac{ie^y + 1}{ie^y - 1}$, welche Gleichung man aber auch aus der vorhergehenden dadurch erhält, dass man y mit xi und x mit yi vertauscht. Wendet man diese erlaubte Vertauschung auf die Gleichung

$$y = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots$$

an, so erhält man die zu beweisende Reihenentwicklung.

15) In der Binomialformel $(1 + x)^m = 1 + (m)_1 x + \ldots$ setze man einmal $x = \sqrt{-1} = i$ und dann $x = -i$, so erhält man Gleichungen, aus welchen man durch Verbindung mit den folgenden $S_2 + S_4 = S_1 + S_3 = 2^{m-1}$ die Summen S_1, S_2, S_3, S_4 berechnen kann, deren reelle Werthe beziehungsweise sind: $2^{m-2} + 2^{\frac{m}{2}-1} \sin \frac{m\pi}{4}$, $2^{m-2} - 2^{\frac{m}{2}-1} \cos \frac{m\pi}{4}$, $2^{m-2} - 2^{\frac{m}{2}-1} \sin \frac{m\pi}{4}$, $2^{m-2} + 2^{\frac{m}{2}-1} \cos \frac{m\pi}{4}$. (Welcher Beschränkung ist der Exponent m unterworfen?)

16) Lässt man in der Gleichung $(1+\Theta_r)^m = S_0 + S_1 \Theta_r + \ldots + S_{p-1} \Theta_r^{p-1}$ an die Stelle von Θ_r die übrigen Wurzeln $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3 \ldots$ der Gleichung $\Theta^p - 1 = 0$ treten, so erhält man $p - 1$ Gleichungen, aus welchen im Verein mit der obigen irgend eine der gesuchten Summen, z. B. S_k, dadurch gefunden wird, dass man jede der Gleichungen mit der $p - k^{ten}$ Potenz der in ihr vorkommenden Wurzel (— also beispielsweise obige Gleichung mit Θ_r^{p-k}) multipliciert und dann sämmtliche Gleichungen addiert. Der linke Theil der so entstehenden neuen Gleichung ist $(1 + \Theta_1)^m \Theta_1^{p-k} + (1 + \Theta_2)^m \Theta_2^{p-k} + \ldots + (1 + \Theta_p)^m \Theta_p^{p-k}$; im rechten Theile aber verschwinden alle Glieder bis auf jenes, welches S_k enthält, denn der Coefficient von S_l z. B. würde lauten $\Theta_1^{p-k+l} + \Theta_2^{p-k+l} + \ldots + \Theta_p^{p-k+l}$ und ist somit entweder Null, wenn l von k verschieden, oder p, wenn l gleich k ist*). Also ist $pS_k = (1+\Theta_1)^m \Theta_1^{p-k} + (1+\Theta_2)^m \Theta_2^{p-k} + \ldots + (1+\Theta_p)^m \Theta_p^{p-k}$, und man hat nur noch die p Wurzeln durch ihre Werthe zu ersetzen, den rechten Theil auf die Form einer complexen Grösse zu bringen und pS_k dem reellen Theile derselben gleich zu setzen, während das imaginäre Glied verschwinden muss. (Gelten die so gewonnenen Relationen für jedes m?)

18) Siehe 16).

21) Wenn $l\left(\frac{a_1 + i}{a_1 - i}\right) = l\left(\frac{a_2 + i}{a_2 - i}\right) + l\left(\frac{A_1 + i}{A_1 - i}\right)$ — unter i die imaginäre Einheit verstanden — gesetzt wird, so folgt hieraus $A_1 = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2 - a_1}$. Setzt man ferner:

---

*) Es ist nämlich
$\Theta_1^{p-k+l} + \Theta_2^{p-k+l} + \ldots + \Theta_p^{p-k+l} = \Theta_1^{-k+l} + \Theta_2^{-k+l} + \ldots + \Theta_p^{-k+l}$ (wegen $\Theta^p = 1$) und dieser Ausdruck ist offenbar $= p$, wenn $-k + l = 0$ ist. Ist aber $-k + l$ nicht Null, so ist jedes Glied dieses Ausdruckes eine der p Wurzeln der Gleichung $\Theta^p - 1 = 0$, in der Art, dass der Ausdruck die Summe der p Wurzeln ist, welche Summe im vorliegenden Falle Null ist.
Siehe Schlömilch's Handbuch pag. 348.

$$l\left(\frac{A_1+i}{A_1-i}\right) = l\left(\frac{a_3+i}{a_3-i}\right) + l\left(\frac{A_2+i}{A_2-i}\right)$$

$$l\left(\frac{A_2+i}{A_2-i}\right) = l\left(\frac{a_4+i}{a_4-i}\right) + l\left(\frac{A_3+i}{A_3-i}\right)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$l\left(\frac{A_{n-3}+i}{A_{n-3}-i}\right) = l\left(\frac{a_{n-1}+i}{a_{n-1}-i}\right) + l\left(\frac{a_n+i}{a_n-i}\right),$$

so müssen die Grössen $A_2 A_3, \dots a_n$ den Gleichungen genügen:

$$A_2 = \frac{A_1 a_3 + 1}{a_3 - A_1},\ A_3 = \frac{A_2 a_3 + 1}{a_4 - A_2} \dots\dots a_n = \frac{A_{n-3}\, a_{n-1} + 1}{a_{n-1} - A_{n-3}},$$

und die Elimination von $A_1, A_2, \dots A_{n-3}$ aus den obigen Gleichungen liefert die zu beweisende Relation

$$1)\ l\left(\frac{a_1+i}{a_1-i}\right) = l\left(\frac{a_2+i}{a_2-i}\right) + \dots\dots l\left(\frac{a_n+i}{a_n-i}\right),$$

in welcher alle Grössen bis auf a_n willkürlich sind. Lässt man in 1) an die Stelle von $a_1, a_2, \dots\dots a_{n-1}$ die Grössen $a_1 i, a_2 i, \dots\dots a_{n-1} i$ treten, so übergeht diese Gleichung in 2) $l\left(\frac{a_1+1}{a_1-1}\right) = l\left(\frac{a_2+1}{a_2-1}\right) + \dots + l\left(\frac{a_n+1}{a_n-1}\right)$, und die zur Berechnung von a_n dienenden Relationen lauten:

$$\frac{a_1 a_2 - 1}{a_2 - a_2} = A_1,\ \frac{A_1 a_3 - 1}{a_3 - A_1} = A_2,\ \frac{A_2 a_4 - 1}{a_4 - A_2} = A_3, \dots \frac{A_{n-3}\, a_{n-1} - 1}{a_{n-1} - A_{n-3}} = a_n.$$

22) *b*) In der Gleichung 1) der vorigen Aufgabe setze man $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, woraus $a_3 = 3$ folgt etc.

d) aus *e*) durch Transformation von $l\left(\frac{5+i}{5-i}\right)$.

e) bis *i*) Dass jeder dieser Ausdrücke $= \frac{2}{i}\, l\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$, zeigt man am einfachsten dadurch, dass man folgende Gleichungen, in welchen L_2 den Ausdruck $l\left(\frac{2+i}{2-i}\right)$ bezeichnet, und die übrigen Grössen eine analoge Bedeutung haben, mittelst der Formel 1) ableitet und dann zweckmässig untereinander verbindet:

$$L_1 = L_2 + L_3,\ L_2 = L_3 + L_7,\ L_3 = L_4 + L_{13} = L_5 + L_8,$$
$$L_4 = L_5 + L_{21},\ L_5 = L_6 + L_{31} = L_7 + L_{18},\ L_6 = L_7 + L_{43},$$
$$L_7 = L_8 + L_{57} = L_9 + L_{32} = L_{12} + L_{17}.$$

27) Man findet leicht die unendliche Reihe

$$1 + q(1+q) + q^2(1+q+q^2) + q^3(1+q+q^2+q^3) + \dots\ (q^2 < 1)$$

den Ausdruck $\frac{(1-q^n)(1-q^{n+1})}{(1-q)(1-q^2)}$ als summatorisches Glied und

$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)}$ als Summe der ganzen Reihe. Setzt man nun $q = x(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, — wobei $[x] < 1$ — so erhält man einerseits die vorgelegten Reihen und andererseits die Ausdrücke

$$\frac{1 - x\cos\varphi - x^2\cos 2\varphi + x^3\cos 3\varphi}{(1 - 2x\cos\varphi - x^2)(1 - 2x^2\cos 2\varphi + x^4)}$$

$$\frac{x\sin\varphi + x^2\sin 2\varphi - x^3\sin 3\varphi}{(1 - 2x\cos\varphi + x^2)(1 - 2x^2\cos 2\varphi + x^4)}$$

als deren Summen.

28) und 29).

$$x\cos\varphi + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2\cos 2\varphi + \ldots = 2 - 2\sqrt{1 - 2x\cos\varphi + x^2}.\cos^2\frac{\psi}{2}$$

$$x\sin\varphi + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2\sin 2\varphi + \ldots = 2\sqrt{1 - 2x\cos\varphi + x^2}.\sin\frac{\psi}{2}$$

$$x\cos\varphi + \frac{1}{1.2}x^2\cos 2\varphi + \ldots = 3x\cos\varphi - \frac{4}{3} + \frac{4}{3}(1 - 2x\cos\varphi + x^2)^{\frac{3}{2}}\cos\frac{3}{2}\psi$$

$$x\sin\varphi + \frac{1}{1.2}x^2\sin\varphi + \ldots = 3x\sin\varphi - \frac{4}{3}(1 - 2x\cos\varphi + x^2)^{\frac{3}{2}}\cos\frac{3}{2}\psi$$

wobei $\cos\psi = \frac{1 - x\cos\varphi}{\sqrt{1 - 2x\cos\varphi + x^2}}$, $\sin\varphi = \frac{x\sin\varphi}{\sqrt{1 - 2x\cos\varphi + x^2}}$.

Diese Formeln gelten, wenn x numerisch kleiner als 1, oder, für $[x] = 1$, wenn $\sin^2\varphi$ und $\cos^2\varphi$ nicht 1 sind.

31) $$\sum_0^\infty \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\cos(2n+1)\varphi = \frac{1}{4}\,l\,\frac{1 + 2x\cos\varphi + x^2}{1 - 2x\cos\varphi + x^2}$$

$$\sum_0^\infty \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\sin(2n+1)\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arctang}\frac{2x\sin\varphi}{1 - x^2}.$$

32) $\frac{1}{2}\operatorname{arctang}\frac{2x\cos\varphi}{1 - x^2}$, $\frac{1}{4}\,l\,\frac{1 + 2x\sin\varphi + x^2}{1 - 2x\sin\varphi + x^2}$.

33) Es sei $S = \sum_1^\infty \frac{x^n}{n}\sin^2 n\varphi$ und $s = \sum_1^\infty \frac{x^n}{n}\cos^2 n\varphi$, so ist

$$S + s = -\,l(1 - x) \text{ und } s - S = -\frac{1}{2}\,l(1 - 2x\cos 2\varphi + x^2) \text{ etc.}$$

34) $\frac{1}{8}\,l\left[\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^2\frac{1 + 2x\cos 2\varphi + x^2}{1 - 2x\cos 2\varphi + x^2}\right]$,

$$\frac{1}{8}\, l \left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \frac{1-2x\cos 2\varphi + x^2}{1+2x\cos 2\varphi + x^2}\right].$$

Aus 33) abzuleiten.

35) $\frac{1}{4}\operatorname{arctang}\frac{4x(1-x^2)\cos^2\varphi}{(1-x^2)^2-4x^2\cos 2\varphi}$,

$\frac{1}{4}\operatorname{arctang}\frac{4x(1-x^2)\sin^2\varphi}{(1-x^2)^2+4x^2\cos 2\varphi}$.

Aus 33) abzuleiten.

36) $\frac{e^{x\sin\varphi}+e^{-x\sin\varphi}}{2}.\cos(x\cos\varphi)$, $\frac{e^{-x\sin\varphi}-e^{x\sin\varphi}}{2}.\sin(x\cos\varphi)$

37) $\frac{e^{x\sin\varphi}+e^{-x\sin\varphi}}{2}.\cos(x\cos\varphi)$, $\frac{e^{x\sin\varphi}-e^{-x\sin\varphi}}{2}.\cos(x\cos\varphi)$

38) $\frac{1}{2}\arccos\left[\sqrt{1-2x^2\cos\varphi+x^4}-x^2\right]$, $\frac{1}{2}\log A$, wo

$$A=\sqrt{(1-2x^2\cos\varphi+x^4)}+x^2\pm\sqrt{\{2x^4-2x^2\cos\varphi+2x^2\sqrt{(1-2x^2\cos\varphi+x^4)}\}}$$

39) $\frac{\sin(2x\cos\varphi)}{\frac{1}{2}\cos(2x\cos\varphi)+\frac{1}{4}e^{2x\sin\varphi}+\frac{1}{4}e^{-2x\sin\varphi}}$,

$\frac{e^{2x\sin\varphi}-e^{-2x\sin\varphi}}{e^{2x\sin\varphi}+e^{-2x\sin\varphi}+2\cos(2x\cos\varphi)}$.

42) Siehe VIII 76).

43) $r^{b-a}.\frac{r^b\cos a\alpha-\cos(b-a)\alpha}{r^{2b}-2r^b\cos b\alpha+1}$, $r^{b-a}.\frac{r^b\sin a\alpha+\sin(b-a)\alpha}{r^{2b}-2r^b\cos b\alpha+1}$.

$r>1$, $a>0$, $b>0$, α reell.

44) und 45) Man bestimme vorerst für jede der Reihen

a) $x^{2n+1}+\sum_{p=1}\frac{C_p(2[n+p]-1)^2}{(2n+2)\ldots\ldots(2n+2p+1)}.x^{2n+2p+1}$ und

b) $x^{2n}+\sum_{p=1}\frac{C_p 2^2(n+p-1)^2}{(2n+1)\ldots\ldots(2n+2p)}.x^{2n+2p}$

die entsprechende Summe. Zu diesem Zwecke gehe man von den Gleichungen aus:

1) $\sin my=\sum(-1)^n\frac{m^{2n+1}y^{2n+1}}{(2n+1)!}$

2) $\sin my=\sum(-1)^r\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots(m^2-(2r-1)^2)\sin^{2r+1}y}{(2n+1)!}$

3) $\cos my=\sum(-1)^n\frac{m^{2n}x^{2n}}{2n!}$

4) $\cos my=1+\sum(-1)^{r+1}\frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ldots(m^2-4r^2)}{(2r+2)}\sin^{2r+2}y$

und ordne die rechten Theile von 2) und 4) nach den steigenden Potenzen von m. Hierbei wird in 2) der Ausdruck

$$\frac{(-1)^r m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots(m^2-(2r-1)^2)}{(2r+1)!}\sin^{2r+1}y =$$

$$=(-1)^n\left[m^{2r+1}-C_1^{(2r-1)^2}m^{2r-1}+\ldots(-1)^{r-n}C_{r-n}^{(2r-1)^2}m^{2r+1}+\ldots\right]\frac{\sin^{2r+1}y}{(2r+1)!}$$

nur dann ein Glied mit m^{2n+1} — nämlich $\frac{(-1)^n C_{r-n}^{(2r-1)^2}\sin^{2r+1}y}{(2r+1)!}\cdot m^{2n+1}$

liefern, wenn $r \overline{\gtrless} n$. Man erhält also aus diesem Gliede alle übrigen die Potenz m^{2n+1} enthaltenden, indem man in demselben $r = n,\ n+1,\ n+2, \ldots$ setzt,

und der Coefficient von m^{2n+1} ist somit $(-1)^n \sum_{p=0} \frac{C_p^{(2(n+p)-1)^2}\sin^{2n+2p+1}y}{(2n+2p+1)!}$

welcher nach einem bekannten Satze dem Coefficienten $(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ der entsprechenden Potenz in 1) gleich sein muss. Verbindet man beide Ausdrücke durch ein Gleichheitszeichen, so findet man nach hinlänglicher Vereinfachung, und nachdem $\sin y = x$ gesetzt wurde, $(\arcsin x)^{2n+1}$ als Summe der Reihe *a*). Auf ganz gleiche Weise ergiebt sich aus 3) und 4) $(\arcsin x)^{2n}$ als Summe von *b*) etc.

52) bis 55) aus 50) und 51) abzuleiten.

56) bis 63) Aus den vorhergehenden Gleichungen dadurch abzuleiten, dass man die reellen Grössen in imaginäre übergehen lässt.

64) *a*) Aus der bekannten Productenformel

$$\Pi\left(1-\frac{x}{m}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}x\pi i}+e^{-\frac{1}{2}x\pi i}\right),$$

in welcher für m alle positiven und negativen ungeraden Zahlen zu setzen sind, dadurch abzuleiten, dass man $x=\frac{z-q}{p}$ setzt.

b) In dem unendlichen Doppelproducte $\Pi\left(1-\frac{z}{mA+m'A'}\right)$, in welchem sich die Multiplikation über alle positiven und negativen ungeraden Zahlwerthe von m und m′ erstrecken soll, und der Quotient $\frac{A'}{A}$ nicht Null sein darf (der Convergenz wegen), denke man sich die Multiplikation zuerst nach m verrichtet, so findet man unter Benutzung der

Gleichung *a)* $\dfrac{e^{\frac{z-m'A'}{2A}\pi i}+e^{\frac{m'A'-z}{2A}\pi i}}{e^{-\frac{m'A'\pi i}{2A}}+e^{\frac{m'A'\pi i}{2A}}}$ als allgemeines Glied des nunmehr einfachen Productes. Hierbei erhält m' alle positiven und negativen ungeraden Zahlwerthe, und wenn man je zwei Factoren mit einander multipliciert, welche numerisch gleiche m' besitzen, so erhält man ferner $\dfrac{1+(h^2+h-2)\,k^{m'}+k^{2m'}}{(1+k^{m'})^2}$ als neues allgemeines Glied, in welchem nun m' blos positive ungerade Werthe erhält. Nimmt man nun in dem Doppelproducte die Multiplikation vorerst nach m' vor, so findet man auf gleiche Weise als allgemeines Glied $\dfrac{1+(h_1^2+h_1-2)\,k_1^m+k_1^{2m}}{(1+k_1^m)^2}$, in welchem m ebenfalls alle positiven ungeraden Zahlwerthe annimmt. Verbindet man nun diese beiden Producte, deren allgemeine Glieder bestimmt wurden, durch ein Gleichheitszeichen, so erhält man die Gleichung *b)*. Um die Gleichungen *c)* und *d)* zu erhalten, verfahre man mit den unendlichen Doppelproducte $z\,\Pi\left(1-\dfrac{z}{nA+n'A'}\right)$ und $\Pi\left(1-\dfrac{z}{nA+mA'}\right)$, in welchem n und n' alle positiven und negativen geraden Zahlwerthe (die Null ausgenommen) annehmen auf analoge Weise. Durch Division der vorstehend angegebenen Doppelproducte erhält man die sogenannten elliptischen Functionen.

65) Das allgemeine Glied des Productes $(S-1)\,\varphi(\gamma-\beta,1,1,q,x\,q^\beta)$ ist

$$\frac{(1-q^\alpha)\ldots(1-q^{\alpha+m-1})(1-q^\beta x)\ldots(1-q^{\beta+m-1}x)z^m}{(1-q)\ldots(1-q^m)\quad(1-q^\gamma)\ldots(1-q^{\gamma+m-1}x)}\varphi(\gamma-\beta,1,1,q,xq^\beta)$$

und lässt sich mittelst der in IX, 57) aufgestellten Formel 5) in

$$\frac{(1-q^\alpha)\ldots(1-q^{\alpha+m-1})\,z^m}{(1-q)\ldots(1-q^m)}\varphi(\gamma-\beta,\,1,\,1,\,q,\,xq^{\beta+m})$$

verwandeln. In diesem Ausdrucke ersetze man φ durch die zugehörige Reihe und verrichte die Multiplikation, so wird das die Potenz x^n enthaltende Glied lauten:

$$\frac{(1-q^\alpha)\ldots(1-q^{\alpha+m-1})\,(1-q^{\gamma-\beta})\ldots(1-q^{\gamma-\beta+n-1})}{(1-q)\ldots(1-q^m)\quad(1-q)\quad\ldots(1-q^n)}\,q^{\beta n+nm}\,z^m\,x^n$$

und man erhält offenbar alle diese Potenz enthaltenden Glieder des obigen Productes, wenn man in dem letztgefundenen Ausdrucke für m alle positive ganze Zahlen, von 1 beginnend, setzt. Also ist der Coefficient von x^n in $(S-1)\,\varphi(\gamma-\beta,\,1,\,1,\,q,\,xq^\beta)$:

$$\frac{(1-q^{\gamma-\beta})\ldots(1-q^{\gamma-\beta+n-1})\,q^{\beta n}}{(1-q)\quad\ldots(1-q^n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(1-q^\alpha)\ldots(1-q^{\alpha+m-1})}{(1-q)\ldots(1-q^m)}\,q^{nm}\,z^m$$

und folglich

$$\frac{(1-q^{\gamma-\beta})\ldots(1-q^{\gamma-\beta+n-1}).q^{\beta n}}{(1-q)\quad\ldots(1-q^n)}\left\{1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(1-q^\alpha)\ldots(1-q^{\alpha+m-1})q^{nm}z^m}{(1-q)\ldots(1-q^m)}\right\}=$$

$$\frac{(1-q^{\gamma-\beta})\ldots(1-q^{\gamma-\beta+n-1})}{(1-q)\quad\ldots(1-q^n)}\, q^{\beta n}\,\varphi(\alpha,\,1,\,1,\,q,\,z\,q^n)=$$

$$\frac{(1-q^{\gamma-\beta})\ldots(1-q^{\gamma-\beta+n-1})(1-z)\ldots(1-q^{n-1}z)}{(1-q)\quad\ldots(1-q^n)\qquad 1-q^\alpha z)\ldots(1-q^{\alpha+n-1}z)}\, q^{\beta n}\,\varphi(\alpha,1,1,q,z)$$

der Coefficient derselben Potenz in dem nach den steigenden Potenzen von x geordneten Producte S $\varphi(\gamma-\beta,\ 1,\ 1,\ q,\ x\,q^\beta)$.

Hiermit sind alle Glieder des Productes gegeben bis auf das Anfangsglied, welches $\varphi(\alpha,\ 1,\ 1,\ q,\ z)$ ist, und man hat, um die Gleichung *a*) zu erhalten, nunmehr die Functionen $\varphi(\alpha,\ 1,\ 1,\ q,\ z)$ und $\varphi(\gamma-\beta,\ 1,\ 1,\ q,\ x\,q^\beta)$ nach Formel 6) (Resultate IX 57) in Producte zu verwandeln. Je nachdem man in *a*) $x=1$ und $z=q^r$ oder $x=1$ und $z=q^{\gamma-\alpha-\beta}$ setzt, erhält man die Gleichung *b*) oder *c*) und überzeugt sich leicht, dass die letztere nicht verschieden ist von der Gleichung, welche die 58. Aufgabe des IX. Cap. enthält.

Um die Gleichung α) zu erhalten, setze man in *a*)

$$\alpha=1,\ \gamma=\beta+1,\ x=q^{-\beta}\,\xi,$$

so erhält man zunächst die Formel

$$\frac{1}{1-\xi}+\frac{z}{1-q\,\xi}+\frac{z^2}{1-q^2\xi}+\ldots=\frac{1}{1-z}+\frac{\xi}{1-q\,z}+\frac{\xi^2}{1-q^2 z}$$

In derselben setze man nun q^2 an die Stelle von q, q statt ξ, $q\,e^{2ix}$ statt z, multipliciere beiderseits mit $\sqrt{q}.e^{ix}$ und drücke schliesslich die Exponentialgrössen durch goniometrische Functionen aus.

Die Formeln β) γ) δ), welche für die höhere Analysis von besonderer Wichtigkeit sind, erhält man auf folgende Weise: In β) wende man auf die Functionen φ die oben citierte Formel 6) an, und man erhält nach leichter Rechnung den zweiten Theil der Gleichung. Um ferner den dritten Theil zu finden, ersetze man diese Functionen durch die entsprechenden Reihen, und bestimme deren Product; man erhält so eine Reihe von der Form $c_0+2c_1\cos 2x+2c_2\cos 4x+\ldots+2c_n\cos 2nx$, in welcher

$$c_n=\prod_{n=1}^{n}\frac{(1-q^{\alpha+n-1})}{1-q^n}\,q^{\frac{n}{2}-na}\,.\,\varphi(\alpha,\ \alpha+n,\ n+1,\ q,\ q^{1-2\alpha})$$

mittelst der Formel 58) Cap. IX zu transformieren ist.

Die Gleichungen γ) und δ) folgen aus β), indem man q^2 statt q und entweder $\alpha = \infty$ oder $\alpha = -\frac{1}{2}$ setzt.

66) *a*) $\dfrac{\Omega(q, \gamma - 1)\,\Omega(q, \gamma - \alpha - \beta - 1)}{\Omega(q, \gamma - \alpha - 1)\,\Omega(q, \gamma - \beta - 1)}$

Zu XI.

1) Das Bildungsgesetz ist leicht erkennbar, wenn man die einzelnen Glieder der Ausdrücke als Combinationsformen auffasst, und jene Glieder beachtet, welche man hinzuzufügen hätte, um in jeder Gruppe gleicher Elementenzahl sämmtliche Combinationen der betreffenden Klasse zu erhalten.

2) Um p_n zu erhalten, gehe man von dem Gliede $a_2\, a_3\, a_4 \ldots a_n\, b_1$ aus und ersetze in diesem $a_2\, a_3$ durch b_3, so erhält man $a_4 \ldots a_n\, b_1\, b_3$ als zweites Glied des Ausdrucks. Nun ersetze man $a_3\, a_4$ durch b_4, wodurch man das dritte Glied $a_2\, a_5 \ldots a_n\, b_1\, b_4$ findet. In den bereits gefundenen Gliedern ersetze man ferner $a_4\, a_5$ durch b_5, dann in sämmtlichen bereits gebildeten, wo es angeht, $a_5\, a_6$ durch b_6 u. s. f., bis man zuletzt an allen Gliedern, wo es thunlich ist, $a_{n-1}\, a_n$ mit b_n vertauscht. Die Summe aller so gefundenen Ausdrücke ist p_n. Auf ähnliche Weise wird q_n gebildet. Der Beweis für die allgemeine Giltigkeit des Verfahrens bleibe dem Leser überlassen.

3) *e*) $\begin{cases} \dfrac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} = \dfrac{a^{n-1} b^{n-1} + (2n-3)_1 a^{n-2} b^{n-2} + (2n-4)_2 a^{n-3} b^{n-3} + \ldots}{a^n\, b^{n-1} + (2n-2)\, a^{n-1} b^{n-2} + (2n-3)_2 a^{n-2} b^{n-3} + \ldots} \\ \dfrac{p_{2n}}{q_{2n}} = \dfrac{a^{n-1} b^n + (2n-2)_1 a^{n-2} b^{n-1} + (2n-3)_2 a^{n-3} b^{n-2} + \ldots}{a^n\, b^n + (2n-1)\, a^{n-1} b^{n-1} + (2n-2)_2 a^{n-2} b^{n-2} + \ldots} \end{cases}$

f) $\dfrac{a b^{n-1} + (n-2) a^3 b^{n-3} + (n-3)_2 a^5 b^{n-5} + \ldots}{b^n + (n-1) a^2 b^{n-2} + (n-2)_2 a^4 b^{n-4} + \ldots}$

4) *a*) Wenn $\dfrac{b - b_n}{a - a_n} = \left[\dfrac{p}{q}, \dfrac{p_1}{q_1}, \ldots \dfrac{p_r}{q_r} \ldots \dfrac{p_n}{q_n}\right]$ gesetzt wird, so ist

$$p = b, \quad p_1 = \frac{a b_1 - a_1 b}{b} \quad p_2 = \frac{(a_2 - a)(b_1 - b) - (b_2 - b)(a_1 - a)}{a_1 b - a b_1}$$

$$q = b, \quad q_1 = \frac{b - b_1}{b} \quad q_2 = \frac{a_2 b - a b_2}{a_1 b - a b_1} \text{ und allgemein:}$$

$$p_r = \frac{(a_r - a)(b_{r-1} - b) - (a_{r-1} - a)(b_r - b)}{(a_{r-2} - a)(b_{r-1} - b) - (a_{r-1} - a)(b_{r-2} - b)}$$

$$q_r = \frac{(a_{r-2} - a)(b_r - b) - (a_r - a)(b_{r-2} - b)}{(a_{r-2} - a)(b_{r-1} - b) - (a_{r-1} - a)(b_{r-2} - b)}$$

Dieser Kettenbruch lässt eine bemerkenswerthe geometrische Deutung zu. Betrachtet man nämlich $a, a_1, a_2 \ldots$ und $b, b_1, b_2, \ldots$ als Coordinaten

von Punkten M_0, M_1, M_2, ... der Ebene in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem XOY, so ist $(a_s - a)(b_z - b) - (a_z - a)(b_s - b)$ der Ausdruck für die doppelte Fläche des Dreieckes $M_0 M_s M_z$, wenn man diese als positiv oder negativ betrachtet, je nachdem die durch die Ordnung der Punkte M_0, M_s, M_z bestimmte Drehung mit jener, wodurch positive Winkel beschrieben werden, von einerlei Sinn ist oder nicht. Daher ist

$$p_r = \frac{M_0 M_r \quad M_{r-1}}{M_0 M_{r-2} M_{r-1}} \text{ und } q_r = \frac{M_0 M_{r-2} M_r}{M_0 M_{r-2} M_{r-1}}$$

Da aber dieses Bildungsgesetz erst von $r = 3$ an ununterbrochen stattfindet, so leite man aus dem obigen Kettenbruche den folgenden $q_2 + \left[\frac{p_3}{q_3}, \ldots \frac{p_n}{q_n}\right]$ ab. Zu diesem Zwecke setze man $\left[\frac{p_3}{q_3}, \ldots \frac{p_n}{q_n}\right] = x$ und

bestimme $q_2 + x$ aus der Gleichung $\frac{b - b_n}{a - b_n} = \left[\frac{p}{q}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2 + x}\right]$, wodurch

man $q_2 + x = \frac{p_2 (a b_n - a_n b)}{(a_1 - a)(b_n - b) - (a_n - a)(b_1 - b)} = p_2 \frac{O \; M_0 M_n}{M_0 \; M_1 M_n}$ findet.

Also ist der gesuchte Kettenbruch $q_2 + \left[\frac{p_3}{q_3}, \ldots \frac{p_n}{q_n}\right] = \frac{p_2 O \; M_0 \; M^n}{M_0 \; M_1 \; M_n}$.

Ersetzt man in dieser Gleichung sämmtliche p und q durch ihre Werthe, so findet man nach leichter Rechnung die Formel:

$$\frac{O M_0 M_n \, . \, M_0 M_2 M_1}{M_0 M_1 M_n} = O M_2 M_0 + \left[\frac{M_0 M_3 M_2 \, . \, O M_1 M_0}{M_0 M_1 M_3}, \ldots \frac{M_0 M_n M_{n-1} \, . \, M_0 M_{n-3} M_{n-2}}{M_0 M_{n-2} M_n}\right]$$

aus welcher man für $n = 3$

$$M_0 O M_3 \, . \, M_0 M_1 M_2 = M_0 O M_2 \, . \, M_0 M_1 M_3 + M_0 M_3 M_2 \, . \, M_0 O M_1$$

und hiermit den folgenden bekannten geometrischen Satz erhält: Verbindet man die Eckpunkte eines Vierecks $O M_1 M_2 M_3$ geradlinig mit einem beliebigen 5ten Punkte M_0 und zieht die Diagonalen OM_2 und $M_1 M_3$, so ist von den Dreiecken, welche die gemeinschaftliche Spitze M_0 besitzen, das Product der beiden auf den Diagonalen aufstehenden gleich der Summe der Producte von je zwei auf gegenüber liegenden Seiten des Vierecks aufruhenden Dreiecken*).

6) $a_0 = p_1$, $b_0 = p_1 p_2$, $a_r = p_{2r} + p_{2r+1}$, $b_{r-1} = p_{2r-1} p_{2r}$.

*) Vergl. Lieblein in Schlöm. Zeitschrift XII, 3. Heft.

7) Es ist $\frac{\alpha + x}{a} = \cfrac{\alpha}{a - \cfrac{a}{1 + \frac{\alpha}{x}}} = \cfrac{\alpha}{a - \cfrac{\alpha\beta}{\beta + \frac{\alpha\beta}{x}}}$. Setzt man nun

$x = \frac{\beta + y}{b}$, so ist also auch $x = \cfrac{\beta}{b - \cfrac{b\gamma}{\gamma + \frac{\beta\gamma}{y}}}$ und hieraus

$$\frac{\alpha\beta}{x} = \alpha\left(b - \cfrac{b\gamma}{\gamma + \frac{\beta\gamma}{y}}\right) \text{ etc.}$$

9) Ist $\frac{p_m}{q_m}$ der betreffende Näherungsbruch, so ist

$$\frac{p_m}{p_{m-1}} = \frac{a_m\, p_{m-1} + b_m\, p_{m-2}}{p_{m-1}} = a_m + \frac{b_m}{p_{m-1} : p_{m-2}} \text{ etc.}$$

11) Bezeichnet man den reducierten Werth von

$a_s + \left[\frac{b_{s+1}}{a_{s+1}} \cdots \frac{b_t}{a_t}\right]$ durch $\frac{p_{s,t}}{q_{s,t}}$, so ist $p_{l,n+m} =$

$$p_{m,m+n} \cdot p_{l,m-1} + b_m \cdot p_{l,m-2} \cdot q_{m,m+n}.$$

12) Der Fehler ist kleiner als $\frac{b_1\, b_2 \ldots b_{n-m+1}}{q_{n-m} \cdot q_{n-m+1}}$ und grösser als

$$\frac{b_1 \ldots b_{n-m+1}}{q_{n-m}\,(q_{n-m+1} + b_{n-m+2} \cdot q_{n-m})}$$

13) β) Mittelst der Gleichungen α) findet man successive:

$(a_2, \ldots a_n, y) = \frac{1}{(a_1, x)}$, $(a_3, \ldots a_n, y = \frac{1}{(a_2, a_1, x)}$, $(a_4, \ldots a_n, y) =$

$\frac{1}{(a_3, a_2, a_1, x)}$, ... und endlich $(y) = \frac{1}{y} = \frac{1}{(a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, x)}$,

woraus $y = (a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, x)$ folgt.

Unter Berücksichtigung von α) wird man aus den beiden Gleichungen $x = (a_1 \ldots y)$ und $y = (a_n \ldots x)$ leicht jene zugehörigen Werthe von x und y berechnen können, welche den Annahmen $y = 0$ oder ∞ und $x = 0$ oder ∞ entsprechen, und da die Gleichung $A + Bx + Cy + Dxy = 0$ auch von diesen Werthepaaren erfüllt werden muss, so erhält man hiermit die nöthige Anzahl von Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der constanten Verhältnisse $\frac{A}{B}, \frac{A}{C}, \ldots$, mit deren Werthen die vorhergehende Gleichung übergeht in 1)

$$\{x - (a_1, \ldots a_n)\}\ \{y - (a_n, \ldots a_1)\} = (a_1, \ldots a_n)\ \{(a_n, \ldots a_1) - (a_n, \ldots a_2)\}$$
$$= (a_n, \ldots a_1)\ \{(a_1, \ldots a_n) - (a_1, \ldots a_{n-1}\}.$$

γ) In der Gleichung 1) ersetze man $y - (a_n, \dots a_1)$ durch $\frac{1}{(y,\ a_n \dots a_1)}$, ferner x durch $(a_1, \dots a_n, y)$ und y durch a_{n+1}, so erhält man aus derselben, wenn man sich überdies der abkürzenden Bezeichnung $\varDelta(a_1 \dots a_{s-1})$ für $(a_1 \dots a_s) - (a_1 \dots a_{s-1})$ bedient, folgende Gleichung:

$$\varDelta(a_1, \dots a_n) = (a_{n+1}, \dots a_1)\,(a_n, \dots a_1)\,\varDelta(a_1, \dots a_{n-1}),$$

aus welcher

$$\varDelta(a_1, \dots a_{n-1}) = (a_n, \dots a_1)\,(a_{n-1}, \dots a_1)^2 \dots (a_2, a_1)^2\,(a_1)^2 \text{ oder}$$

$$2)\quad (a_n, \dots a_1)\,\varDelta(a_1, \dots a_{n-1}) = (a_n, \dots a_1)^2\,(a_{n-1}, \dots a_1)^2 \dots (a_2, a_1)^2\,(a_1)$$

folgt, mittelst deren 1) in

$$3)\quad \{x - (a_1, \dots a_n)\}\,\{y - (a_n, \dots a_1)\} = (a_n, \dots a_1)^2 (a_{n-1}, \dots a_1)^2 \dots (a_2, a_1)^2 (a_1)^2$$

übergeht.

Aber nach 1) ist auch

$$(a_n, \dots a_1)\,\varDelta(a_1, \dots a_{n-1}) = (a_n, \dots a_1)\,\{(a_1, \dots a_n) - (a_1, \dots a_{n-1})\} =$$
$$(a_1, \dots a_n)\,\{(a_n, \dots a_1) - (a_n, \dots a_2)\}$$

und hier entsteht, wie man sieht, der rechte Theil aus dem linken einfach dadurch, dass man die Elemente $a_1, a_2, \dots a_n$ in umgekehrter Ordnung folgen lässt. Diese Vertauschung wird daher auch in 2) erlaubt sein, und liefern:

$$(a_n, \dots a_1)^2\,(a_{n-1}, \dots a_1)^2 \dots (a_2, a_1)^2\,(a_1)^2 = (a_1, \dots a_n)^2\,(a_2, \dots a_{n-1})^2 \dots (a_{n-1}, a_n)^2\,(a_n)^2$$

oder

$$4)\quad (a_n, \dots a_1)(a_{n-1}, \dots a_1) \dots (a_2\,a_1)(a_1) = (a_1, \dots a_n)(a_2, \dots a_{n-1}) \dots (a_{n-1}, a_n)(a_n).$$

ε) Setzt man $(a, \dots f_m) = x$, $(a_1, \dots f_m) = x_1$, $(a_2, \dots f_m) = x_2$ etc., so ist 5) $x = (a, \dots f - x_1)$, $x_1 = (a_1, \dots f_1 - x_2)$ etc. Wenn man nun die Gleichung 3) auf 5) anwendet, also an die Stelle von x und y successive die Werthe x und $f - x_1$, x_1 und $f_1 - x_2$ etc. treten lässt, so erhält man mit Rücksicht auf 4) und das in δ) eingeführte Symbol die Relationen:

$$\{x - (a, \dots e)\}\,\{f - x_1 - (e, \dots a)\} = \frac{1}{((a, \dots e))^2},$$

$$\{x_1 - (a_1, \dots e_1)\}\,\{f_1 - x_2 - (e_1, \dots a_1)\} = \frac{1}{((a_1, \dots e_1))^2} \text{ etc.,}$$

aus welchen man einen Kettenbruch ableiten kann, der sich von dem gesuchten nur in der Form unterscheidet, und mit Zuhilfenahme der früher entwickelten Beziehungen zur völligen Uebereinstimmung gebracht werden kann.

η) Sollen die beiden Kettenbrüche $(a_1, \dots a_r, b_1, b_2, \dots b_m, a_{r+1}, \dots a_n)$ und $(a_1, \dots a_r, a_{r+1}, \dots a_n)$ einander gleich sein, so muss sich der Bruch $(b_1, b_2, \dots b_m, y)$ für jeden Werth von y auf $(y) = \frac{1}{y}$ reducieren, und daher zwischen diesen Grössen nach β) Gleichung 4) die Gleichung bestehen:

$$\left\{\frac{1}{y} - (b_1,\ldots b_m)\right\}\left\{y - (b_m,\ldots b_1)\right\} = (b_m,\ldots b_1)^2 (b_{m-1},\ldots b_1)^2 \ldots (b_1)^2 = \frac{1}{((b_1,\ldots b_m))^2}$$

oder

$$(b_1,\ldots b_m)\, y^2 - \left\{1 + (b_m,\ldots b_1)(b_1,\ldots b_m) - \frac{1}{((b_1,\ldots b_m))^2}\right\} y + (b_m,\ldots b_1) = 0,$$

welcher bei der völligen Unbestimmtheit von y nur genügt werden kann, wenn $(b_1,\ldots b_m) = \frac{((b_2,\ldots b_m))}{((b_1,\ldots b_m))} = 0$

$$(b_m,\ldots b_1) = \frac{((b_1,\ldots b_{m-1}))}{((b,\ldots b_m))} = 0$$

und $1 + (b_1,\ldots b_m)(b_m,\ldots b_1) - \frac{1}{((b_1,\ldots b_m))^2} = 0$ gesetzt wird, woraus

6) $((b_2,\ldots b_m)) = 0$, $((b_1,\ldots b_{m-1})) = 0$ und $((b_1,\ldots b_m)) = \pm 1$ folgt. Diese Gleichungen lassen sich durch andere ersetzen. Wenn man nämlich die letzte der Formeln δ) auf 6) anwendet, so findet man die Gleichung 7) $((a_2,\ldots a_{n-1})) = +1$, wenn man nur das Vorzeichen + beibehält. Wendet man ferner die leicht nachweisbare Formel $((b_r,\ldots b_s)) = b_r((b_{r+1},\ldots b_s)) - ((b_{r+2},\ldots b_s)) = b_s((b_r,\ldots b_{s-1})) - ((b_r,\ldots b_{s-2}))$ auf die beiden ersten der Gleichungen 6) an, so findet man die Rücksicht auf 7) schliesslich $b_1 = ((b_3,\ldots b_{m-1}))$ und $b_m = ((b_2,\ldots b_{m-2}))$ *).

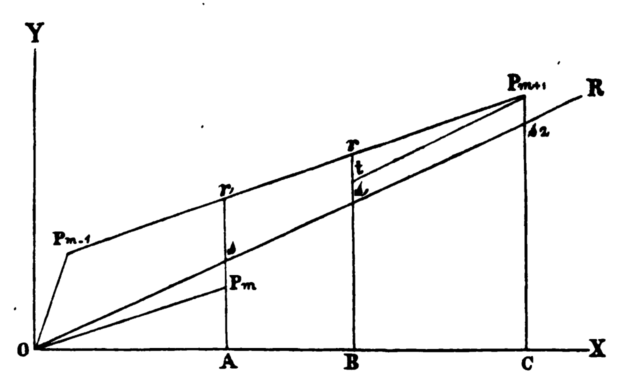
14) α) Es seien P_1, P_2, P_3, ... die Punkte, welche beziehungsweise die Coordinaten (q_1, p_1), (q_2, p_2), (q_3, p_3)... besitzen, und O der Anfangspunkt des Coordinatensystems. Zieht man durch P_1 eine Parallele zur Richtung OP_2 bis zum Durchschnitte mit der Geraden, welche parallel zur Ordinatenachse im Abstande $q_2 a_3 + q_1$ gezogen wird, so erhält man den Punkt P_3; denn seine Coordinaten sind $q_2 a_3 + q_1 = q_3$ und $p_2 a_3 + p_1 = p_3$. Auf ähnliche Weise kann man den Punkt P_4 aus den beiden Punkten P_2 und P_3 ableiten u. s. f. Da nun die beiden Dreiecke OP_2P_1 und OP_2P_3 die gemeinschaftliche Grundlinie OP_2 besitzen, und deren Scheitel P_1 und P_3 in einer Parallelen zur Grundlinie liegen, so sind sie flächengleich. Aber auch die Dreiecke OP_2P_3 und OP_4P_3 sind flächengleich, denn auch sie besitzen eine gemeinschaftliche Grundlinie, nämlich OP_3, und P_2P_4 ist der Construction zu Folge parallel zu OP_3. Ebenso leicht überzeugt man sich von der Gleichheit der beiden Flächen OP_3P_4 und OP_5P_4 etc. Diese Flächen durch ihre Coordinaten ausgedrückt, findet man also: $p_1 q_2 - p_2 q_1 = p_3 q_2 - p_2 q_3 = p_3 q_4 - p_4 q_3 = \ldots = \pm (p_{m+1} q_m - p_m q_{m+1})$ und hieraus, wegen $p_1 q_2 - p_2 q_1 = 1$, $p_{m+1} q_m - p_m q_{m+1} = \pm 1$.

β) (Siehe nachstehende Fig.) Man ziehe die Geraden OP_{m-1}, OP_m, P_{m-1}, P_{m+1} und die Gerade OR, für welche die tg XOR dem Werthe

---

*) Siehe: Möbius, „Beiträge zur Lehre von den Kettenbrüchen" im 6. Bande von Crelle's Journal, pag. 218.

des Kettenbruches $[a_1, \dots a_n]$ gleich sein soll. Nach dem Vorhergehenden wird die Gerade $P_{m-1}P_{m+1}$ parallel sein zu OP_m, und die Richtung OR wird zwischen OP_{m-1} und OP_m fallen, wenn wir m als eine gerade Zahl voraussetzen. Es seien ferner $\beta = OB$ und $\alpha = Br$ die Coordinaten des Punktes r, für welchen $rP_{m+1} = f \cdot OP_m$ sein soll, unter f eine positive, ganze Zahl kleiner als a_{m+1} verstanden, und $tP_{m+1} \,//\, OR$. Aus der Figur ist nun ersichtlich, dass $P_m s = As = AP_m = q_m [a_1, \dots a_n] - p_m$



und $s_1 r = Br - Bs_1 = \alpha - \beta [a_1, \dots a_n]$. Ueberdies sind die beiden Dreiecke $OP_m s$ und $P_{m+1} r t$ einander ähnlich, somit

$$P_m s = \frac{tr}{f} < tr < s_1 r, \text{ also } -(p_m - q_m [a_1, \dots a_n]) < \alpha - \beta [a_1, \dots a_n].$$

Andererseits ist auch $s_2 P_{m+1} < s_1 r$, daher auch

$$p_{m+1} - q_{m+1} [a_1, \dots a_n] < \alpha - \beta [a_1, \dots a_n].$$

Hiermit ist die von Lagrange angegebene Eigenschaft der Kettenbrüche bewiesen, wenn man noch bedenkt, dass alle Punkte, deren Coordinaten ganze, beziehungsweise zwischen p_m und p_{m+1}, q_m und q_{m+1} liegende Zahlen sind, der Strecke $r_1 P_{m+1}$ angehören*).

15) Da $\lim \frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}} = \lim \frac{n(n+1)}{(n+3)^2} = 1 > 0$, so convergiert der Kettenbruch **).

16) bis 23) conv.

24) bis 33) Für jeden dieser Kettenbrüche ist $\lim \left(\frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) = 0$ und

---

*) Die Idee, die Eigenschaften der Näherungsbrüche aus geometrischen Constructionen abzuleiten, gehört dem englischen Mathematiker Sylvester an; der obige Beweis wurde von dem italienischen Mathematiker Prof. Betti gegeben.

**) Schlömilch's Handb. pag. 280.

deshalb bedarf es eines anderen Kennzeichens, um über die Convergenz oder Divergenz entscheiden zu können. Dies liefert folgender Satz:

Behufs des Beweises gehe man von der bekannten Gleichung 1)

$$[k_1, k_2, \ldots k_n] = \frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \frac{1}{q_2 q_3} - \ldots + \frac{(-1)_n}{q_{n-1} q_n}$$

aus und setze in derselben sämmtliche k positiv voraus, dann wird für das unbegrenzte Wachsen von n die im rechten Theile stehende Reihe convergieren, wenn ihre Glieder unbegrenzt abnehmen. Zur Convergenz des Kettenbruches ist also erforderlich, dass das Product $q_{n-1} q_n$ ins Unendliche wachse, und dies wird sicher der Fall sein, wenn die Reihe $k_1 + k_3 + k_5 + \ldots$ divergiert. Denn aus der independenten Darstellung der Näherungsbrüche geht hervor, dass q_n, je nachdem n gerade oder ungerade ist, entweder auf die Form $1 + A$, oder $k_1 + k_3 + k_5 + \ldots + k_n + B$ gebracht werden könne, wobei A und B positive Grössen sind; mithin wird auch $q_{n-1} q_n$ immer in der Form $k_1 + k_3 + k_5 + \ldots k_n + C$ darstellbar sein (C eine positive Zahl), woraus das Obige folgt. Da die beiden Kettenbrüche $[k_1, k_2, \ldots]$ und $[k_2, k_3, \ldots]$ offenbar gleichzeitig convergieren, so folgt hieraus nach eben Bewiesenem, dass der Kettenbruch $[k_1, k_2 \ldots)$ auch dann convergiert, wenn die Reihe $k_2 + k_4 + k_6 + \ldots$ divergiert. Angenommen nun, die beiden Reihen $k_1 + k_3 + k_5 + \ldots$ und $k_2 + k_4 + k_6 + \ldots$ seien gleichzeitig convergent, dann wird in Folge dieser Annahme auch die Reihe $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + \ldots$ und somit auch das unendliche Product $(1 + k_1)(1 + k_2)(1 + k_3) \ldots$ convergieren. Dies hat aber zur Folge, dass q_n nicht mit n ins Unendliche wächst, sondern vielmehr sich einer endlichen Grenze nähert. Denn aus der combinatorischen (independenten) Bildung der Näherungsbrüche ersieht man, dass $q_n < 1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots C_n^n$, wobei die Combinationen aus den Elementen $k_1, k_2, k_3, k_4 \ldots$ zu bilden sind. Der rechte Theil dieser Ungleichheit ist aber die Entwicklung des Productes $(1 + k_1)(1 + k_2) \ldots (1 + k_n)$, dessen Grenzwerth endlich ist. Anderseits kann q_n nicht Null werden, also ist $\lim q_n$ ein endlicher Werth. Hierdurch wird die Reihe in 1) zu einer oscillierenden, somit oscilliert auch $\lim \frac{p_n}{q_n}$ je nach der Beschaffenheit von n zwischen verschiedenen Werthen und der Kettenbruch divergiert. Hiermit hat man den Eingangs aufgestellten Satz schon für Kettenbrüche der speciellen Form $[k_1, k_2, \ldots]$ bewiesen. Setzt man aber $k_1 = \frac{a_1}{b_1}$, $k_2 = a_2 \frac{b_1}{b_1}$ und allgemein

$$k_{2m+1} = \frac{a_{2m+1}}{b_{2m+1}} \frac{b_{2m}}{b_{2m-1}} \ldots \frac{b_2}{b_1} \text{ und } k_{2m+2} = a_{2m+2} \frac{b_{2m+1}}{b_{2m+1}} \ldots \frac{b_1}{b_2},$$

so übergeht der Kettenbruch $[k_1, k_2 \ldots]$ in $\left[\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots\right]$ und die beiden

Reihen $k_1 + k_3 + k_5 + \ldots$, $k_2 + k_4 + k_6 \ldots$ werden identisch mit jenen im obigen Satze angeführten.

24) bis 26) conv. 27) und 28) div. 29) conv. oder div., je nachdem $\alpha \leqq 1$ oder $\alpha > 1$. 30) conv. 31) conv., wenn $k \leqq 2$. 32) div., wenn $k > 2$. 33) div., wenn $r > 0$.

34) bis 40) Sämmtliche Kettenbrüche sind in der Form

$$\left[\frac{b_1}{a_1}, -\frac{b_2}{a_2}, -\frac{b_3}{a_3}, -\ldots\right]$$

enthalten, welche sich mittelst der Identität

$$-\frac{b_m}{a_m + r} = -1 + \left[\frac{1}{1}, \frac{b_m}{a_m - b_m + r}\right] \text{in} \left[\frac{b_1}{a_1 - 1}, \frac{1}{1}, \frac{b_2}{a_2 - b_2}, \frac{b_3}{a_3 - 1}, \ldots\right]$$

verwandeln lässt. Sind nun sämmtliche Zähler und Nenner der Glieder dieses neuen Kettenbruches > 0, so kann man die frühere Regel anwenden, und man findet: 34) bis 38) conv.

42) Unter der gemachten Voraussetzung convergiert der Kettenbruch. Bezeichnet man den Werth desselben durch $f(m, n)$, so setze man

$$m - 1 + \frac{n-1}{f(m, n)} = a_1,\; m - 2 + \frac{n-2}{a_1} = a_2,\; m - 3 + \frac{n-3}{a_2} = a_3, \text{ etc.}$$

und berechne hieraus $f(m, n)$ etc.

43) Die Gleichheit der beiden Kettenbrüche liefert den Satz: „Der unendliche Kettenbruch $\left[\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots\right]$, in welchem sämmtliche a und b positive ganze Zahlen sind, und die Differenzen $b_n - b_{n-1}$ und $a_n - a_{n-1}$ für jedes n einen constanten positiven Werth besitzen, ist rational, wenn b_1 ein Vielfaches dieser Differenz und grösser als a_1 ist.

46) In der Gleichung $\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} + \cfrac{\frac{(-1)^{n-1}}{q^2_{n-1}}}{\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} + a_n}$

setze man $a_n + [a_1, a_2, \ldots a_n]$ an die Stelle von a_n etc., so findet man schliesslich $[a_1, a_2, \ldots] = \frac{1}{q_{n-1}}\left\{p_{n-1} + \left[\frac{(-1)^{n-1}}{q_n + p_{n-1}}, \frac{(-1)^{n-1}}{q_n + p_{n-1}}, \ldots\right]\right\}$.

49) Es ist $\frac{b_{n-1}}{a_{n+1}} = p - \cfrac{q}{p + \frac{b_n}{a_n}}$ etc.

51) Man setze $\sqrt{a^2 + b} = a + x$, so folgt hieraus einerseits 1) $x^2 + 2ax - b = 0$ und andererseits 2) $x = \frac{b - x^2}{2a}$. Man betrachte

nun 1) als Stammgleichung und leite aus derselben neue Gleichungen ab, deren Wurzeln beziehungsweise die Quadrate, Biquadrate u. s. w. der Wurzeln der Stammgleichung sind. Diese Gleichungen sind:

$$x_,^2 - (4a^2 + 2b)\, x_, + b^2 = x_,^2 - 2a_1 x_, + b_1 = 0 \quad (x_, = x^2)$$
$$x_{,,}^2 - (4a_1^2 + 2b_1)\, x_{,,} + b_1^2 = x_{,,}^2 - 2a_2 x_{,,} + b_2 = 0 \quad (x_{,,} = x_,^2 = x^4) \text{ etc.}$$

und geben $x_, = \frac{b_1 + x_,^2}{2a_1}$, $x_{,,} = \frac{b_2 + x_{,,}^2}{2a_2}, \ldots$, wodurch 2) übergeht in

$$x = \cfrac{b - \cfrac{2a_1}{b_1 + \cfrac{2a_2}{b + \ldots}}}{2a} \qquad \text{etc.}$$

53) *a*) Die Reihe heisst nach ihrem berühmten Erfinder die Lambert'sche, und lässt sich, nach Clausen und Scherk, in die folgende verwandeln:

$$x\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + x^4\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) + x^9\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right) + \ldots$$

Es ist nämlich $\frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + \ldots$

$$\frac{x^2}{1-x^2} = x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Summiert man diese für $x^2 < 1$ unbedingt convergierende Doppelreihe in der Art, dass man die erste Vertikal- und die erste Horizontalreihe zusammenfasst, und mit der jeweilig verbleibenden Doppelreihe ebenso verfährt, und bedenkt, dass man bei einem solchen Vorgange die Diagonalglieder x, x^4, $x^9 \ldots$ doppelt zählt; so erhält man die transformierte Reihe. Ordnet man dagegen nach Potenzen von x, so erhält jeder Coefficient so viele Einheiten, als der Exponent Theiler hat. Eine weitere bemerkenswerthe Transformation rührt von Eisenstein her. Nach dieser ist die Lambert'sche Reihe auch =

$$\frac{\frac{x}{1-x} - \frac{2x^2}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{3x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} - \frac{4x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} + }{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$$

$$= \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x} + \frac{x^4}{1-x^2} + \frac{x^6}{1-x^2} + \ldots + \frac{x^{n^2}}{1-x^n} + \frac{x^{n^2+n}}{1-x^n} + \ldots$$

Aus dieser letzteren Reihe erhält man mittelst der Euler'schen Formel den angegebenen Kettenbruch.

b) Durch diese Gleichung ist die Irrationalität der Reihe

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^9} + \ldots$$

für alle positive oder negative ganze Werthe von x (die Einheit ausgenommen) bewiesen.

54) *a*) Wenn man für den Kettenbruch

$$F(x) = \left[\frac{1}{1}, -\frac{\varrho_1 x}{1}, -\frac{\varrho_2 x}{1}, -\ldots\right]$$

die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche entwickelt, so findet man

$p_0 = 1, p_1 = 1, \quad p_2 = 1 - a_2 x, \quad p_3 = 1 - (a_2 + a_3) x,$

$q_0 = 1, q_1 = 1 - a_1 x, q_2 = 1 - (a_1 + a_2) x, q_3 = 1 - (a_1 + a_2 + a_3) x + a_1 a_3 x^2.$

Allgemein ist ferner $p_{n+1} = p_n - \varrho_{n+1} x . p_{n-1}$ und $q_{n+1} = q_n - \varrho_{n+1} x q_{n-1}$; auch ersieht man leicht, dass p_{2n}, p_{2n+1}, q_{2n-1} und q_{2n} in Bezug auf x ganze rationale Functionen vom n^{ten} Grade sind, deren absolutes Glied 1 ist. Es ist also sowohl q_{2n-1} als auch q_{2n} in der Form

$$1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_n x^n$$

enthalten. Man denke sich nun diesen Kettenbruch in eine Potenzenreihe verwandelt, was nach dem eben Gesagten immer möglich ist, so wird diese bis auf die n^{te} Potenz incl. mit der Entwicklung von $\frac{p_n}{q_n}$ in eine aufsteigende Reihe übereinstimmen. Denn durch wiederholte Anwendung der bekannten Formel $\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{\varrho_n x (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1})}{q_{n-1} q_n}$ findet man leicht:

$$\frac{p_n}{q_n} = \left[\frac{1}{1}, -\frac{\varrho_1 x}{1}, + \ldots - \frac{\varrho_n x}{1}\right] = 1 + \frac{\varrho_1 x}{q_0 q_1} + \frac{\varrho_1 \varrho_2 x^2}{q_1 q_2} + \ldots + \frac{\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_n x^n}{q_{n-1} q_n}$$

und

$$F(x) = \lim \frac{p_n}{q_n} = 1 + \frac{\varrho_1 x}{q_0 q_1} + \frac{\varrho_1 \varrho_2 x^2}{q_1 q_2} + \ldots + \frac{\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_n x^n}{q_{n-1} q_n} + \frac{\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{n+1} x^{n+1}}{q_n q_{n+1}} + \ldots,$$

daher $F(x) - \frac{p_n}{q_n} = \varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{n+1} x^{n+1} \left\{\frac{1}{q_n q_{n+1}} + \frac{\varrho_{n+2} x}{q_{n+1} q_{n+2}} + \ldots\right\}$, woraus das Behauptete folgt. Betrachten wir jetzt getrennt die Fälle, in welchen n gerade oder ungerade ist. Im ersten Falle ist x^{2n+1} die niedrigste Potenz, welche in $F(x) - \frac{p_{2n}}{q_{2n}}$, also auch in $q_{2n} F(x) - p_{2n}$ vorkommen kann, und daher müssen in $q_{2n} F(x)$, — da p_{2n} blos vom n^{ten} Grade ist —, die Coefficienten der Potenzen x^{n+1}, $x^{n+2} \ldots x^{2n}$ verschwinden. Im zweiten Falle ist in $F(x) - \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}$, und somit auch in $q_{2n-1} F(x) - p_{2n-1}$, die Potenz x^{2n} die niedrigste, und da p_{2n-1} vom Grade n — 1 ist, so müssen in $q_{2n-1} F(x)$ die Coefficienten der Potenzen $x^n, \ldots x^{2n-1}$ verschwinden. In beiden Fällen fehlen also genau so viele Potenzen, als das jedesmalige q

Coefficienten c hat. Man denke sich nun die Multiplication des Ausdruckes $q_n F(x)$ wirklich ausgeführt, und das Product nach steigenden Potenzen von x geordnet, so wird der Coefficient von x_{n+r} in $q_{2n} F(x) = = (1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots c_n x^n)(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)$ sein:

$$1)\ a_r c_n + a_{r+1} c_{n-1} + a_{r+2} c_{n-2} + \ldots + a_{n+r-1} c_1 + a_{n+r} = 0$$

und in $q_{2n-1} F(x) = (1 + c'_1 x + c'_2 x^2 + \ldots c'_n x^n)(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)$

$$2)\ a_r c'_n + a_{r+1} c'_{n-1} + \ldots + a_{n+r-1} c'_1 + a_{n+r} = 0.$$

In 1) setze man successive $r = 1, 2, 3, \ldots n$, und in 2) $r = 0, 1, 2, \ldots n-1$, so erhält man zwei Gleichungssysteme 3) und 4), aus welchen sich die Constanten c und c' berechnen lassen, wenn die Constanten a gegeben sind; d. h. man ist hiermit im Stande, jeden Näherungsbruch jenes Potenz-Kettenbruches zu berechnen, welcher aus der Verwandlung einer Potenzenreihe entsteht. Beschränkt man sich darauf, blos die Constanten ϱ zu ermitteln, so bestimme man aus den beiden Gleichungssystemen 3) und 4) c_n und c'_n; man findet:

$$5)\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots a_n \\ a_2 & a_3 & \ldots a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & \ldots a_{2n-1} \end{vmatrix} c_n = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & \ldots a_{n+1} \\ a_3 & a_3 & \ldots a_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \ldots a_{2n} \end{vmatrix} \text{ und}$$

$$6)\ \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \ldots a_{n+1} \\ a_1 & a_2 & \ldots a_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & \ldots a_{2n-2} \end{vmatrix} c'_n = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots a_n \\ a_2 & a_3 & \ldots a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & \ldots a_{2n-1} \end{vmatrix}$$

und kann aus diesen Gleichungen die Coefficienten von x^{n-1} in q_{2n-2} und von x^{n+1} in q_{2n+1}, welche wir durch c''_{n-1} und c'''_{n+1} bezeichnen wollen, leicht ableiten. Die Coefficienten c unterliegen aber, wie aus ihrer Entstehung hervorgeht, der Bedingung:

$$c_k - \varrho_{2n+1} c'_{k-1} = c'''_k \text{ und}$$

$$c'_k - \varrho_{2n} \cdot c''_{k-1} = c_k$$

Demnach ist $\varrho_{2n+1} = -\dfrac{c'''_{n+1}}{c'_n}$ (wegen $c_{n+1} = 0$)

und $\varrho_{2n} = -\dfrac{c_n - c'_n}{c''_{n-1}}$, und das ganze Problem der Entwicklung einer Potenzenreihe in einen Potenzkettenbruch ist somit auf die Ermittlung einer besonderen Gattung symmetrischer Determinanten reduciert. Diese Methode ist nicht mehr anwendbar, wenn die Determinanten verschwinden, was z. B. von einem gewissen ϱ_r ab jedesmal ein-

treten wird, wenn a_n eine ganze rationale Function von n ist. In einem solchen Falle müssen recurrierende Rechnungsweisen angewendet werden*).

b) Wir stellen uns die Aufgabe, die Reihe $\frac{\varphi_1}{\varphi_0} = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} + \ldots$ in einen Kettenbruch von der Form

$$\left[\frac{1}{m_1 x + n_1}, -\frac{1}{m_2 x + n_2}, -\frac{1}{m_3 x + n_3}, -\ldots\right]$$

zu transformieren. Man überzeugt sich leicht, dass p_{n+1} und q_n bezüglich x ganze rationale Functionen vom n^{ten} Grade sind, dass also

$$q_n = c_0^{(n)} + c_1^{(n)} x + \ldots + c_n^{(n)} x^n.$$

Ferner weiss man, dass $\frac{\varphi_1}{\varphi_0} + \frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{q_n q_{n+1}} + \frac{1}{q_{n+1} q_{n+2}} + \ldots$

woraus 2) $q_n \frac{\varphi_1}{\varphi_0} - p_n = (c_0^{(n)} + c_1^{(n)} x + \ldots c_n^{(n)} x^n)\left(\frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \ldots\right) - p_n =$

$\frac{1}{q_{n+1}} + q_n \left(\frac{1}{q_{n+1} q_{n+2}} + \ldots\right)$ folgt. Der rechte Theil dieser Gleichung kann nach fallenden Potenzen von x entwickelt werden, und fängt, da q_{n+1} von $n+1^{ten}$ Grade ist mit $\frac{1}{x^{n+1}}$ an. Es verschwinden somit im linken Theile die Coefficienten von $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots \frac{1}{x^n}$ und jene von $x^0, x^1, \ldots x^{n-1}$. Hierdurch erhält man zwei Gleichungssysteme. Aus dem erstern kann man die Constanten in q_n bis auf einen constanten Factor bestimmen; nachdem diese gefunden, liefert das andere Gleichungssystem die Werthe der Constanten in p_n. Das erste Gleichungssystem lautet:

$$3)\ \begin{cases} c_0^{(n)} a_0 + c_1^{(n)} a_1 + \ldots + c_n^{(n)} a_n = 0 \\ c_0^{(n)} a_1 + c_1^{(n)} a_2 + \ldots + c_n^{(n)} a_{n+1} = 0 \\ \vdots \\ c_0^{(n)} a_{n-1} + c_1^{(n)} a_n + \ldots + c_n^{(n)} a_{2n-1} = 0 \end{cases}$$

und man findet aus denselben, wenn man die neue Unbekannte ω_n durch

die Gleichung 4) $c_n^{(n)} = \omega_n \begin{vmatrix} a_0 & \ldots a_{n-1} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & \ldots a_{2n-1} \end{vmatrix}$ einführt.

*) Siehe Heine, „Ueber eine gewisse Reihe von allgemeiner Form“ (Crelle's Journ. 34. Band), und Hankel, „Ueber eine besondere Classe der symmetrischen Determinanten.“ Inaugural-Dissertation.

$$q_n = \omega_n \begin{vmatrix} a_0 & \dots a_n \\ \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & \dots a_{2n-1} \\ 1 & \dots x^n \end{vmatrix}$$

Um nun ω_n zu finden, bemerke man, dass in den beiden Theilen in 2) auch die Coefficienten von $\frac{1}{x^{n+1}}$ einander gleich sein müssen, wodurch man erhält 5) $c_0^{(n)} a_n + c_1^{(n)} a_{n+1} + \dots c_n^{(n)} a_{2n} = \frac{1}{c_{n+1}^{(n+1)}}$. In dieser Gleichung substituiere man für $c_0^{(n)}$ bis $c_n^{(n)}$ die aus 3) gefundenen Werthe und für $c_{n+1}^{(n+1)}$ nach 4) den Ausdruck $\omega_{n+1} \begin{vmatrix} a_0 \dots a_n \\ \vdots \quad \vdots \\ a_n \dots a_{2n} \end{vmatrix}$, so übergeht 5) in

$$\begin{vmatrix} a_0 \dots a_n \\ \vdots \quad \vdots \\ a_n \dots a_{2n} \end{vmatrix} \omega_n = 1 : \omega_{n+1} \begin{vmatrix} a_0 \dots a_n \\ \vdots \quad \vdots \\ a_n \dots a_{2n} \end{vmatrix}, \text{ woraus } \begin{vmatrix} a_0 \dots a_n \\ \vdots \quad \vdots \\ a_n \dots a_{2n} \end{vmatrix} \omega_n \ \omega_{n+1} = 1$$

folgt, aus welcher Gleichung ω_n berechnet werden kann, sobald ω_1 durch ein directes Verfahren gefunden ist*).

55) In 54) *a*) substituiere man in die Gleichungen 1) und 2) für die Constanten a, die aus $F(\alpha, 1, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots$ folgenden Werthe, so erhält man, indem man m an die Stelle von n treten lässt, nach einigen Vereinfachungen, folgende Gleichungssysteme:

$$1) \begin{cases} c_m + \frac{\alpha+1}{\gamma+1} c_{m-1} + \dots \frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+m-1)}{(\gamma+1)\dots(\gamma+m-1)} = 0 \\ \vdots \\ c_m + \frac{\alpha+m}{\gamma+m} c_{m-1} + \dots + \frac{(\alpha+m)\dots(\alpha+2m-1)}{(\gamma+m)\dots(\gamma+2m-1)} = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} c'_m + \frac{\alpha}{\gamma} c'_{m-1} + \dots \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+m-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+m-1)} = 0 \\ \vdots \\ c'_m + \frac{\alpha+m-1}{\gamma+m-1} c'_{m-1} + \dots + \frac{(\alpha+m-1)\dots(\alpha+2m-2)}{(\gamma+m-1)\dots(\gamma+2m-2)} = 0 \end{cases}$$

*) Hankel, „Ueber die Transformation von Reihen in Kettenbrüche.“ (Aus den Sitzungsberichten der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, 1862.)

welche man am zweckmässigsten durch successive Elimination der Unbekannten auflöst. Man findet aus 2) $c'_n = (-1)^n (m)_n \frac{(m+\alpha-1)_n}{(\gamma+2m-2)_n}$ und hieraus durch Vertauschung von $\alpha+1$ mit α und $\gamma+1$ mit γ, $c_n = (-1)^n (m)_n \frac{(m+\alpha)_n}{(\gamma+2m-1)_n}$ (denn das System 2) übergeht durch diese Vertauschung in 1)). Diese Werthe in

$$q_{2m-1} = 1 + c'_1 x + c'_2 x^2 + \ldots + c'_m x^m \text{ und}$$
$$q_{2m} \quad = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_m x^m$$

substituiert, erhält man die angegebenen Formeln.

56) Aus der vorhergehenden Aufgabe dadurch abzuleiten, dass man $\gamma = 1, \frac{x}{\alpha}$ an die Stelle $+\alpha$ setzt, und α ins Unendliche wachsen lässt. Auch direct lässt sich das Resultat leicht finden. Hierzu bemerke man, dass $\varrho_{2n} = -\frac{n}{(2n-1)\,2n}$ und $\varrho_{2n+1} = \frac{n}{2n\,(2n+1)}$.

57) $l\,(1+x) = x\,F\,(1, 1, 2, -x)$, $\varrho_{2n} = -\frac{n^2}{2n\,(2n+1)}$,

$$\varrho_{2n+1} = -\frac{(n+1)^2}{(2n+1)\,(2n+2)},$$

$$q_{2m} = 1 + (m)_1 \frac{(m+1)_1}{(2m+1)_1}\,x + (m)_2 \frac{(m+1)_2}{(2m+1)_2}\,x^2 + \ldots,$$

$$q_{2m-1} = 1 + \frac{(m)_1^2}{(2m)_1}\,x + \frac{(m)_2^2}{(2m)_2}\,x^2 + \ldots.$$

58) Aus der angegebenen Formel leite man zunächst die Gleichung

$$1)\quad \frac{\varphi\,(\alpha, \beta+1, \gamma+1, q, x)}{\varphi\,(\alpha, \beta, \gamma, q, x)} =$$

$$= \frac{1}{1 - q^{\beta}\,x\,\frac{(1-q^{\alpha})\,(1-q^{\gamma-\beta})}{(1-q^{\gamma})\,(1-q^{\gamma+1})} \cdot \frac{\varphi\,(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, q, x)}{\varphi\,(\alpha, \beta+1, \gamma+1, q, x)}}$$

ab, und wende dieselbe auf den im rechten Theil vorkommenden Quotienten $\frac{\varphi\,(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, q, x)}{\varphi\,(\alpha, \beta+1, \gamma+1, q, x)}$ an, indem man $\alpha+1$ statt α, und $\gamma+1$ statt γ setzt u. s. w.; so findet man den gesuchten Kettenbruch. Es ist erlaubt, den Kettenbruch ins Unendliche fortzusetzen, denn das Restglied $\varrho_{2n} \frac{\varphi\,(\alpha+n, \beta+n+1, \gamma+2n+1, q, x)}{\varphi\,(\alpha+n, \beta+n, \gamma+2n, q, x)}$ convergiert gegen die Null, da $\varrho_{2n} = \frac{q^{\alpha+n-1}\,(1-q^{\beta+n})\,(1-q^{\gamma+n-\alpha})}{(1-q^{\gamma+2n-1})\,(1-q^{\gamma+2n})}$ und

$$\varrho_{2n+1} = q^{\beta+n}\,\frac{(1-q^{\alpha+n})\,(1-q^{\gamma+n-\beta})}{(1-q^{\gamma+2n})\,(1-q^{\gamma+2n+1})}.$$

Von den übrigen Gleichungen erhält man die ersten vier aus den Formeln:

$$2)\ \varphi(\alpha+1, \beta, \gamma, q, x) - \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) =$$
$$= q^{\alpha} x \frac{(1-q^{\beta})}{(1-q^{\gamma})} \varphi(\alpha+1)\ \beta+1, \gamma+1, q, x)$$

$$3)\ \varphi(\alpha, \beta+1, \gamma, q, x) - \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) =$$
$$= q^{\beta} x \frac{(1-q^{\alpha})}{(1-q^{\gamma})} \varphi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, q, x)$$

$$4)\ \varphi(\alpha-1, \beta+1, \gamma, q, x) - \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) =$$
$$= - q^{\alpha+1} x \frac{(1-q^{\beta-\alpha+1})}{(1-q^{\gamma})} \varphi(\alpha, \beta+1, \gamma+1, q, x)$$

$$5)\ \varphi(\alpha+1, \beta-1, \gamma, q, x) - \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) =$$
$$= q^{\alpha} x \frac{(1-q^{\beta-\alpha-1})}{(1-q^{\gamma})} \varphi(\alpha+1, \beta, \gamma+1, q, x)$$

und die letzte aus der Verbindung von

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) - \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, qx) =$$
$$= \frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\beta})}{(1-q^{\gamma})} x \varphi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, q, x) \text{ mit 2) und 1).}$$

60) Der gesuchte Kettenbruch ist ein besonderer Fall des in Nr. 58) für $\frac{\varphi(\alpha, \beta+1, \gamma+1, q, x)}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)}$ gefundenen und aus diesem zu erhalten, wenn $\beta = 0$ und γ für $\gamma + 1$ gesetzt wird. Um die Nenner Q_{2n-1} und Q_{2n} zu finden, substituiere man die Gleichung 2) Nr. 54) a) der „Resultate" für die Constanten a die Werthe, welche aus

$$\varphi(\alpha, 1, \gamma, q, x) = 1 + \frac{1-q^{\alpha}}{1-q^{\gamma}} x + \frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\alpha+1})}{(1-q^{\gamma})(1-q^{\gamma+1})} x^2 + \dots \text{ folgen.}$$

Hierdurch erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$c'_n + c'_{n-1} \frac{1-q^{\alpha}}{1-q^{\gamma}} + \dots + \frac{(1-q^{\alpha})\dots(1-q^{\alpha+n-1})}{(1-q^{\gamma})\dots(1-q^{\gamma+n-1})} = 0$$

$$c'_n + c'_{n-1} \frac{(1-q^{\alpha+n-1})}{(1-q^{\gamma+n-1})} + \dots + \frac{(1-q^{\alpha+n-1})(1-q^{\alpha+2n-2})}{(1-q^{\gamma+n-1})(1-q^{\gamma+2n-2})} = 0$$

aus welchem man die zu zu Q_{2n-1} gehörigen c' berechnen kann. Ersetzt man in diesen Gleichungen α durch $\alpha + 1$ und γ durch $\gamma + 1$, so erhält man ein neues System, welches die Constanten c des Nenners Q_{2n} liefert. Die Unbekannten successive elimierend, findet man:

$$c'_s = (-1)^s q^{\frac{1}{2}s(s-1)} \frac{(1-q^n)\dots(1-q^{n+s-1})\cdot(1-q^{\alpha+n-1})\dots(1-q^{\alpha+n-s})}{(1-q)\dots(1-q^s)\dots\dots\dots(1-q^{\gamma+2n-s-1})}$$

und

$$c_s = (-1)^s q^{\frac{1}{2}s(s-1)} \frac{(1-q^n)\dots(1-q^{n+1-s})}{(1-q)\dots(1-q^s)} \cdot \frac{(1-q^{\alpha+n})\dots(1-q^{\alpha+n+1-s})}{(1-q^{\gamma+2n-1})\dots(1-q^{\gamma+2n-s})}$$

und mit diesen Werthen aus

$$Q_{2n-1} = 1 + c'_1 x + c'_2 x^2 + \ldots + c'_n x^n \text{ und}$$
$$Q_{2n} = 1 + c x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$$

die ersten zwei der gesuchten Formeln. ((*a*) und *b*)).

Um die zwei letzten Formeln zu beweisen, beachte man, dass, wenn

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = \left[\frac{1}{1}, -\frac{\varrho_1 x}{1}, \ldots . -\frac{\varrho_{2n} x}{1}\right]$$

gesetzt wird, hieraus $\frac{Q_{2n-1}}{Q_{2n}} = \left[\frac{1}{1}, -\frac{\varrho_{2n} x}{1}, -\frac{\varrho_{2n-1} x}{1}, \ldots - \frac{\varrho_1 x}{1}\right]$ folgt*).

Substituiert man für die Grössen ϱ die in Nr. 58) angegebenen Werthe, so zeigt die Vergleichung des so gefundenen neuen Kettenbruches mit jenem in 58), dass ersterer in seiner ganzen Ausdehnung mit dem Anfange der Entwicklung von

$$1) \frac{\varphi(-n-\beta, 1-n-\alpha, 1-\gamma-2n, q, q^{\alpha+\beta-\gamma} x)}{\varphi(-n-\beta, -n-\alpha, -\gamma-2n, q, q^{\alpha+\beta-\gamma} x)} \text{ übereinstimmt.}$$

Es giebt zwei Annahmen, für welche 1) mit $\frac{Q_{2n-1}}{Q_{2n}}$ identisch wird, nämlich $\beta = 0$, oder $\gamma = \alpha$, weil in beiden Fällen 1) da abbricht, wo die Glieder anfangen würden, welche nicht mehr in $\frac{Q_{2n-1}}{Q_{2n}}$ enthalten sind. Die Annahme $\beta = 0$ führt auf die Formeln *a*) und *b*) zurück. Die Annahme $\gamma = \alpha$ aber liefert die jetzt gesuchten Formeln. Denn unter dieser Voraussetzung übergeht 1) in

$$\frac{\varphi(-n-\beta, 1-n-\alpha, 1-\alpha-2n, q, q^{\beta} x)}{\varphi(-n-\beta, -n-\alpha, -\alpha-2n, q, q^{\beta} x)},$$

welcher Quotient $= \frac{\varphi(-n, 1+\beta-\alpha-n, 1-\alpha-2n, q, x)}{\varphi(-n, \beta-\alpha-n, -\alpha-2n, q, x)}$ 2) ist, wovon man sich leicht dadurch überzeugt, dass beide Quotienten mittelst der in 58) angegebenen Transformation denselben Kettenbruch liefern. In 2) sind aber Zähler und Nenner ganze rationale Functionen vom n^{ten} Grade mit dem absoluten Gliede 1, also ist der Zähler gleich Q_{2n-1} und der Nenner gleich Q_{2n}**).

61) bis 73) Vermittelst der Identität

$$1 . u_1 u_2 \ldots u_n = 1 + 1(u_1 - 1) + u_1(u_2 - 1) + u_1 u_2 (u_3 - 1 + \ldots . + u_1 u_2 \ldots u_{n-1}(u_n - 1)$$

lässt sich das Product $\frac{d_1}{e_1}\frac{d_2}{e_2}\ldots\frac{d_n}{e_n}$ für beliebige n in die gleichgeltende

*) Siehe Aufgabe 9) in XI.

**) Siehe die wiederholt erwähnte Abhandlung von Heine.